

Lucas Nathan Pereira Silva

Espalhamento kink-antikink em modelos deformados

São Luís

2023

Lucas Nathan Pereira Silva

Espalhamento kink-antikink em modelos deformados

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Física da Universidade Federal do Maranhão, para obtenção do título de Bacharel em Física.

Universidade Federal do Maranhão – UFMA

Curso de Bacharelado em Física

Coordenação do Curso de Física

Orientador: Prof. Dr. Fabiano de Carvalho Simas

São Luís

2023

Lucas Nathan Pereira Silva

Espalhamento kink-antikink em modelos deformados/ Lucas Nathan Pereira Silva. – São Luís, 2023–

58p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Fabiano de Carvalho Simas

TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal do Maranhão – UFMA

Curso de Bacharelado em Física

Coordenação do Curso de Física, 2023.

1. Kink. 2. Defeito topológico . 2. Campo escalar. I. Prof. Dr. Fabiano de Carvalho Simas. II. Universidade federal do maranhão. III. Faculdade de xxx. IV. Título

Lucas Nathan Pereira Silva

Espalhamento kink-antikink em modelos deformados

Monografia apresentada ao Curso de Bacharelado em Física da Universidade Federal do Maranhão, para obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho aprovado. São Luís, () de () de 2023:

Prof. Dr. Fabiano de Carvalho Simas
Orientador

Prof. Dr. Carlos Eduardo da Hora Santos
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Fred Jorge Carvalho Lima
Instituto Federal do Sertão Pernambucano

São Luís
2023

*Dedico este trabalho ao meu eu mais jovem, por nunca ter deixado de acreditar nesta
carreira e projeto de vida.*

Agradecimentos

Agradeço a minha avó, Elizabete, e ao meu pai Welton, pois sem eles certamente não teria conseguido realizar esse que sempre foi um sonho de infância. Agradeço aos meus amigos de infância do colégio alfa, que estiveram presentes nesta caminhada, e também a alguns amigos de graduação por terem me ajudado em momentos difíceis ao longo desses quatro anos e meio. Agradeço ao Professor Fabiano, pois a ajuda e o interesse dele neste trabalho foram essenciais para a sua conclusão. Por fim agradeço ao departamento de física e aos professores em geral por essa experiência desafiadora.

*“I must not fear. Fear is the mind-killer.
Fear is the little-death that brings total obliteration. I will face my fear.
I will permit it to pass over me and through me.
And when it has gone past I will turn the inner eye to see its path.
Where the fear has gone there will be nothing.
Only I will remain.
(Frank P. Herbert, Dune)*

Resumo

Nesse trabalho analisamos o processo de colisão kink-antikink com campo escalar em (1,1)-dimensões. Inicialmente foram abordadas definições, como por exemplo, quebra espontânea de simetria. Essa discussão leva a formação dos defeitos topológicos. Além disso, discutimos a respeito do teorema de Derrick, equação de Bogomol'nyi, a análise da estabilidade linear das soluções e ainda sobre a topologia e carga topológica. Dentro do cenário do espalhamento de kinks, reproduzimos alguns dos principais resultados do modelo ϕ^4 . Em seguida estudamos a colisão de kinks do modelo sinh-deformado. O potencial possui dois vácuos degenerados e um estado vibracional, ingrediente responsável pelo mecanismo de troca de energia ressonante. Os resultados mostraram o aparecimento das janelas de two-bounces. Na sequência, apresentamos os resultados para a interação dos defeitos em um modelo deformado que depende do parâmetro b . A variação desse parâmetro indica uma transição do modelo ϕ^4 para o modelo ϕ^6 . A análise de estabilidade linear mostrou o aumento do número de modos vibracionais, isso tem como consequência uma maior dificuldade na formação das janelas de two-bounces.

Palavras-chave: Kink. Espalhamento. Defeito Topológico.

Abstract

In this work, we analyze the process of kink-antikink collision with a scalar field in (1,1)-dimensions. Initially, we addressed definitions such as spontaneous symmetry breaking. This discussion leads to the formation of topological defects. Additionally, we discussed the Derrick's theorem, Bogomol'nyi equation, linear stability analysis of solutions, as well as topology and topological charge. Within the framework of kink scattering, we reproduced some of the main results of the ϕ^4 model. Next, we studied the collision of kinks in the sinh-deformed model. The potential has two degenerate vacua and a vibrational state, which is responsible for the resonant energy exchange mechanism. The results showed the emergence of two-bounce windows. Subsequently, we presented the results for the interaction of defects in a deformed model that depends on the parameter b . The variation of this parameter indicates a transition from the ϕ^4 model to the ϕ^6 model. The analysis of linear stability showed an increase in the number of vibrational modes, which leads to a greater difficulty in the formation of two-bounce windows.

Keywords: Kink. Scattering. Topological defect.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Potencial do modelo ϕ^4 ; fonte: Autor	29
Figura 2 – Soluções de campo do modelo ϕ^4 ; fonte: Autor	30
Figura 3 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Paras ambas figuras $v_i = 0.14$	31
Figura 4 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Paras ambas figuras $v_i = 0.2598$	32
Figura 5 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Paras ambas figuras $v_i = 0.198$; Primeira janela de two-bounce($n=1$);(c) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (d) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Paras ambas figuras $v_i = 0.2265$; Segunda janela de two-bounce($n=2$)	33
Figura 6 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Paras ambas figuras $v_i = 0.25395$; Oitava janela de two-bounce($n=8$);(c) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (d) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Paras ambas figuras $v_i = 0.2549$; Nona janela de two-bounce($n=9$)	33
Figura 7 – Potencial de estabilidade ϕ^4 ; fonte: Autor	34
Figura 8 – Potencial sinh-deformado; fonte: Autor	36
Figura 9 – Potencial de estabilidade; fonte: Autor	37
Figura 10 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão kink-antikink. Paras ambas figuras $v_i = 0.33$	38
Figura 11 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão kink-antikink. Paras ambas figuras $v_i = 0.43$	39
Figura 12 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão kink-antikink. Paras ambas figuras $v_i = 0.445$	39
Figura 13 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão kink-antikink. Paras ambas figuras $v_i = 0.4439$	40

Figura 14 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão kink-antikink. Paras ambas figuras $v_i = 0.465$	40
Figura 15 – Potencial deformado $V(\chi)$; Linha vermelha($b=1$); Linha azul($b=0.8$); Linha verde($b=0.6$); Linha preta($b=0.4$); Linha ciano($b=0.2$); Linha magenta($b=0$); fonte: Autor	41
Figura 16 – Solução do tipo kink; Linha vermelha($b=1$); Linha azul($b=0.8$); Linha verde($b=0.6$); Linha preta($b=0.4$); Linha ciano($b=0.2$); Linha magenta($b=0$); fonte: Autor	42
Figura 17 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Paras ambas figuras $v_i = 0.075$ e $b = 0.8$; segunda janela de two-bounce($n=2$);(c) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (d) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Paras ambas figuras $v_i = 0.1$ e $b = 0.8$; terceira janela de two-bounce($n=3$)	43
Figura 18 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Paras ambas figuras $v_i = 0.118$ e $b = 0.8$; quinta janela de two-bounce($n=5$);(c) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (d) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Paras ambas figuras $v_i = 0.122$ e $b = 0.8$; sexta janela de two-bounce($n=6$)	44
Figura 19 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Paras ambas figuras $v_i = 0.132$ e $b = 0.8$	44
Figura 20 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Paras ambas figuras $v_i = 0.131$ e $b = 0.8$	45
Figura 21 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Paras ambas figuras $v_i = 0.14$ e $b = 0.8$	45
Figura 22 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão kink-antikink. Paras ambas figuras $v_i = 0.07$ e $b = 0.8$	46
Figura 23 – Potencial de estabilidade; Linha vermelha($b=1$); Linha azul($b=0.8$); Linha verde($b=0.6$); Linha preta($b=0.4$); Linha ciano($b=0.2$); Linha magenta($b=0$)	47
Figura 24 – Estrutura ressonante das colisões; (a) Para $b=1$; (b) Para $b=0.8$	48

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Campo escalar	12
1.1.1	Modelo com um campo escalar	13
1.1.2	Invariância e Tensor energia-momento	14
1.1.3	Equação de Klein-Gordon	18
1.1.4	Lagrangeana do campo de Klein-Gordon	19
2	DEFEITO TOPOLÓGICO - KINK	22
2.1	Campo escalar com simetria discreta Z_2	22
2.2	Teorema de Derrick	24
2.3	Equação de Bogomol'nyi	25
2.4	Estabilidade linear das soluções	26
2.5	Topologia e carga topológica	28
3	COLISÕES KINK-ANTI-KINK	29
3.1	Modelo ϕ^4	29
3.2	Modelo sinh-deformado	36
3.3	Modelo de solução de Klein-Gordon deformado	40
4	CONCLUSÃO	49
	REFERÊNCIAS	51
	APÊNDICES	54
	APÊNDICE A – MÉTODOS MATEMÁTICOS UTILIZADOS	55
A.1	Método de diferenças finitas	55
A.2	Método de Runge-Kutta	56
	APÊNDICE B – EQUAÇÃO DE MOVIMENTO E PRINCÍPIO DE HAMILTON	57
B.1	Calculo variacional	57

1 Introdução

A noção de campo é bastante presente na física, compreendendo diferentes contextos de estudo na física, estes se mostram instrumentos essenciais na descrição de sistemas físicos. Alguns exemplos disso são, a descrição de sistemas hidrodinâmicos feita por meio da noção de campo das velocidades em um fluido sem turbulência, a descrição do eletromagnetismo através de campos elétricos e magnéticos e até de sistemas térmicos por meio dos campos de temperatura de um material. O conceito de campo é importante como um todo na física, e que ganha uma importância enorme dentro do contexto das chamadas teorias de campo [1].

1.1 Campo escalar

No contexto da mecânica clássica descrevemos os sistemas em termos de partículas pontuais e de suas posições, velocidades e instantes. Para um sistema de partículas temos um conjunto de coordenadas q_i chamadas de generalizadas (pois a princípio não há distinção entre o sistema adotado) descrevendo a i -ésima partícula. Seja $i = 1, 2, \dots, N$ com N o número total de partículas do sistema, pode-se então descrever $(q_1, q_2, \dots, q_N)$ que compõe o chamado espaço de configurações do sistema. Essa descrição funciona bem para sistemas discretos, porém o que acontece se quisermos tratar casos em que o sistema é contínuo ($N \rightarrow \infty$) [2]? A resposta para esta pergunta é a descrição destes sistemas a partir de campos, contudo isso não responde a pergunta por completo, dado que não sabemos ainda o que é um campo.

Um exemplo bastante conhecido de campo é o eletromagnético, um campo vetorial que é a atribuição de cada ponto no espaço à um vetor $A_\mu(x^\mu)$ que nada mais é que uma função vetorial do espaço 4-dimensional de Minkowski. Embora seja o exemplo mais familiar não é o mais simples. O campo mais simples é o campo escalar $\phi(x)$ que nada mais é que uma função que mapeia os pontos do espaço em um conjunto de escalares, e que pode ser também complexo tendo componentes $\text{Re}[\phi(x)]$ e $\text{Im}[\phi(x)]$. Em especial o campo escalar relativístico $\phi(x^\mu)$ que mapeia os quadri-vetores posição $\phi : x^\mu \rightarrow a$, onde $a \in K$, pode ser o conjunto dos números reais ou complexos [3].

A descrição de campos é de suma importância no contexto da física de partículas, onde na teoria quântica de campos há uma correspondência clara entre campos e partículas. Sendo as partículas descritas como oscilações destes campos [4]. Em especial podemos destacar um tipo específico destas excitações de campo, chamadas de defeitos topológicos,

em particular um tipo de defeito conhecido como *sóliton*, ou *onda solitária*. A primeira descrição deste defeito foi feita a partir das observações do fenômeno por John Scott Russell [5]. As observações de Russell fundamentaram muito do que se entende hoje como propriedades fundamentais de um defeito, como o fato dessas ondas serem detectáveis em regiões finitas e localizadas do espaço, e possuindo uma intrigante estabilidade, que é explicada por uma combinação de efeitos dispersivos e de não linearidade [6, 7]. A estabilidade está intimamente relacionada com o caráter topológico das soluções. A estrutura topológica mais simples nesse contexto é chamado de *kink* [8, 9] um tipo de solução de onda viajante descrita em (1+1)-dimensões da qual surge no contexto de modelos também descritos por campos escalares com quebra espontânea de simetria [10]. O estudo destas soluções tem grande papel de relevância no contexto das teorias de campo, aparecendo tanto em física da matéria condensada [11, 12], como paredes de domínio e estudo de transições de fase [13], como também no contexto da cosmologia, em modelos que buscam descrever a matéria escura e transições de fase do universo primordial [14, 15, 16, 17]. Um interessante estudo das soluções tipo Kink é feito através da modelagem do sistema afim de analisar o comportamento das colisões entre o par $K\bar{K}$. Em modelos como o ϕ^4 [18, 19, 20] há o surgimento de um intrincado padrão fractal de estruturas ressonantes. O comportamento fractal observado pode ser compreendido a partir da dependência da velocidade inicial (v_i) do par $K\bar{K}$, que define regiões de comportamentos distintos, de modo que para velocidades suficientemente elevadas ($v_i > v_{cr}$) apresenta o par $K\bar{K}$ se separando após uma única colisão. No entanto para velocidades menores que a velocidade crítica ($v_i < v_{cr}$), há a alternância entre as chamadas janelas de *two-bounces* e estados *armadilhados*, conhecidos como *bion*.

1.1.1 Modelo com um campo escalar

A partir da noção de campo podemos construir a dinâmica do sistema através do formalismo Lagrangeano. Seja $\phi = \phi(x^\mu)$ um campo escalar real relativístico que descreve um sistema geral regido pela interação de um potencial $V(\phi)$, podemos descrever uma Lagrangeana L

$$L = \int \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) dx^D, \quad (1.1)$$

$$L = \int \mathcal{L} dx^D, \quad (1.2)$$

onde integramos sobre um volume D -dimensional. A partir da função de Lagrange $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^\mu, \phi, \partial_\mu \phi)$ podemos escrever a ação

$$S = \int \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right) dx^{D+1}, \quad (1.3)$$

a descrição desta forma do sistema permite que por meio do princípio de Hamilton, obtenhamos as equações dinâmicas do campo

$$\delta S = 0, \quad (1.4)$$

onde a derivada funcional

$$\delta S = \int \frac{\delta S}{\delta \alpha} dx^{D+1}, \quad (1.5)$$

isso implica que

$$\frac{\delta S}{\delta \alpha} = 0, \quad (1.6)$$

ao fazer isso e integrando sobre dois extremos de tal modo que $\delta\phi_a = \delta\phi_b = 0$ descrevem as condições de contorno do problema, então temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0. \quad (1.7)$$

A equação obtida corresponde a equação de Euler-Lagrange para campos com coordenadas $\mu = 0, 1, \dots, D$. Assim, podemos encontrar a seguinte equação de movimento

$$\square \phi + V_\phi = 0. \quad (1.8)$$

Onde $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ e V_ϕ corresponde a derivada em relação a ϕ . É fácil verificar que a equação que descreve a dinâmica do campo é uma equação de onda com termo de fonte V_ϕ . Embora tenha sido dito que esta equação descreve campos escalares relativísticos, uma maneira melhor de ver isso é partindo de um argumento físico que em princípio está contido dentro da própria teoria da dinâmica relativística, obtendo assim a chamada equação de Klein-Gordon.

1.1.2 Invariância e Tensor energia-momento

Ao estudar sistemas físicos na natureza, os físicos e pesquisadores de outras áreas em geral sempre buscam encontrar leis naturais que tenham caráter fundamental, ou seja, que incorpore os aspectos essenciais do sistema. Ao estudar o movimento descrevemos um sistema físico a partir das forças que atuam sobre o sistema e que causam o movimento. Do ponto de vista da dinâmica Newtoniana, a segunda lei de Newton descreve como uma força impõe variação de velocidade sobre um corpo, a este corpo dizemos que o seu estado de movimento foi alterado, ou seja houve uma variação de seu estado inicial de movimento (ref). A este estado inicial podemos associar o chamado momento linear ou quantidade de movimento $\vec{P}$, sendo esta quantidade física associada ao movimento e possuindo uma propriedade que a torna uma lei fundamental da natureza, a conservação, dizemos então que esta se conserva na ausência de forças resultantes sobre o sistema, isso significa que um corpo em movimento, a não ser que seu estado de movimento seja alterado, tem uma quantidade que dizemos que é conservada perante a evolução temporal do sistema, podemos enunciar isso matematicamente da seguinte forma

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{P} = C, \quad (1.9)$$

ou seja, que o momento linear não varia temporalmente. A importância desta lei é muito grande, pois estabelece um ponto de partida para se estudar sistemas físicos ao fixarmos

propriedades intrínsecas a estes sistemas que não se alteram temporalmente. A conservação de energia é uma dessas leis fundamentais e está presente nos mais variados sistemas sejam eles, mecânicos, termodinâmicos ou sistemas no regime clássico e quântico. Leis de conservação, portanto são os grandes pilares da física, pois são extremamente gerais e se estendem por quaisquer que sejam as sub-áreas de estudo, porém isso não significa que seja tarefa simples deduzir estas leis, ou pelo menos não era antes dos trabalhos da matemática Emmy Noether a respeito das simetrias internas de um sistema, publicados em 1908 no *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* [21]. Neste trabalho ela propôs e provou o famoso teorema que levaria o seu nome, teorema de Noether. Ela mostrou que as simetrias contínuas de um sistema descrito por um formalismo no contexto variacional estão conectadas a presença de quantidades associadas a estes sistemas e que estas quantidades são conservadas no contexto da evolução desse sistema. Portanto, um sistema físico descrito por uma função de Lagrange dentro do formalismo variacional, possuiria transformações associadas as simetrias internas do sistema, e que estas ao tornarem a ação invariante indicariam a presença de quantidades conservadas. Por exemplo, um sistema que é invariante para translações temporais da Lagrangeana leva a conservação da energia do sistema. O teorema de Noether é geral para problemas deste tipo, de modo que podemos generalizar o teorema também para a descrição de campos. Seja um campo $\phi(x^\mu)$ que depende das variáveis independentes x^μ , onde supomos que existe um par de transformações estas que deixam a Lagrangeana invariante [22]

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu, \quad (1.10)$$

$$\phi(x^\mu) \rightarrow \phi'(x^\mu) = \phi(x^\mu) + \delta\phi(x^\mu), \quad (1.11)$$

neste caso consideremos então uma Lagrangeana da forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu), \quad (1.12)$$

há de se notar que $\delta\phi$ é meramente a variação funcional de ϕ , onde ϕ' é comparado a ϕ no mesmo ponto do espaço-tempo x^μ . A variação total em ϕ , $\Delta\phi$ é dada por

$$\Delta\phi = \phi'(x^{\mu'}) - \phi(x^\mu), \quad (1.13)$$

tal que podemos introduzir $\phi(x^{\mu'})$, de modo que

$$\Delta\phi = \phi'(x^{\mu'}) - \phi(x^{\mu'}) + \phi(x^{\mu'}) - \phi(x^\mu), \quad (1.14)$$

onde novamente temos uma derivada funcional $\delta\phi = \phi'(x^{\mu'}) - \phi(x^{\mu'})$ e uma diferencial total, pois a diferença dos campos é dada em pontos no espaço-tempo distintos $d\phi = \phi(x^{\mu'}) - \phi(x^\mu)$, dessa maneira obtemos a variação total do campo como

$$\Delta\phi = \delta\phi + (\partial_\mu \phi) \delta x^\mu. \quad (1.15)$$

A partir das transformações obtidas é possível calcular a variação da ação perante as transformações partindo da relação

$$\delta S = \int \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi', x^{\mu'}) dx^{\mu'} - \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu) dx^\mu, \quad (1.16)$$

se estas transformações tornam a Lagrangeana invariante, inevitavelmente temos que $\delta S = 0$. Contudo estamos trabalhando com dois conjuntos de variáveis, o que na verdade é um problema, contornamos então este problema a partir da transformação de coordenadas do tipo $dx^{\mu'} = J\left(\frac{x'}{x}\right)dx^\mu$, esta pode ser obtida a partir da translação das variáveis independentes

$$x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu, \quad (1.17)$$

aplicando uma derivada $\partial_\lambda x^{\mu'}$

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial}{\partial x^\lambda}(\delta x^\mu), \quad (1.18)$$

onde $\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\lambda} = \delta_\lambda^\mu$. Portanto a partir desta equação obtemos que

$$J\left(\frac{x'}{x}\right) = \det(\delta_\lambda^\mu + \partial_\lambda(\delta x^\mu)), \quad (1.19)$$

partindo então da álgebra do simbolo de Kronecker, temos que os únicos termos não nulos são $\lambda = \mu$, logo

$$j\left(\frac{x'}{x}\right) = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu), \quad (1.20)$$

substituindo a (eq.1.20) na equação (eq.1.16) teremos que:

$$\delta S = \int \mathcal{L}(1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)) - \int \mathcal{L} dx^\mu, \quad (1.21)$$

que leva à relação

$$\delta S = \int (\delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \partial_\mu(\delta x^\mu)) dx^\mu, \quad (1.22)$$

utilizando resultados obtidos anteriormente, temos que a variação da ação leva a seguinte equação

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta \phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \mathcal{L} \partial_\mu(\delta x^\mu) \right) dx^\mu, \quad (1.23)$$

após algumas operações algébricas, obtemos uma forma diferente para a equação acima

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu) \right) dx^\mu, \quad (1.24)$$

esse resultado leva a duas relações que devem ser igualmente satisfeitas

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi dx^\mu + \int \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) dx^\mu, \quad (1.25)$$

utilizando o princípio de Hamilton $\delta S = 0$. Para obter portanto as equações que minimizam o funcional acima, duas condições devem valer, a primeira integral deve levar às equações

de Euler-Lagrange, as equações dinâmicas do campo devem ser satisfeitas. A segunda integral é uma representação no formalismo covariante do teorema de Gauss, e também é nula, assim temos

$$\int \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) dx^\mu = \int_{\partial R} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) d\sigma^\mu, \quad (1.26)$$

$$\int_{\partial R} \partial_\mu J^\mu dx^\mu = \int_{\partial R} J^\mu d\sigma^\mu, \quad (1.27)$$

onde obtemos uma quadri-corrente J^μ

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \mathcal{L} \delta x^\mu, \quad (1.28)$$

utilizando a relação (eq.1.15) obtemos a expressão

$$\int_{\partial R} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\phi - \delta x^\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \phi - \mathcal{L} \delta_\nu^\mu \right) \right) d\sigma^\mu = 0, \quad (1.29)$$

da expressão acima podemos identificar o chamado tensor energia-momento:

$$\theta_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L} \delta_\nu^\mu, \quad (1.30)$$

deste modo podemos rescrever a integral acima como

$$\int_{\partial R} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Delta\phi - \delta x^\nu \theta_\nu^\mu \right) d\sigma^\mu = 0, \quad (1.31)$$

supondo que a ação é invariante para as transformações de grupo nas coordenadas x^μ e no campo ϕ representadas pelas transformações arbitrárias

$$\delta x^\mu = X_\nu^\mu d\omega^\nu, \quad (1.32)$$

$$\Delta\phi = \Phi_\mu d\omega^\mu, \quad (1.33)$$

onde X_ν^μ é uma matriz e ϕ_μ um conjunto de números. Substituindo as transformações na integral, temos

$$\int_{\partial R} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \Phi_\mu - \theta_\lambda^\mu X_\nu^\lambda \right) \delta\omega^\nu d\sigma^\mu = 0, \quad (1.34)$$

com $\delta\omega^\nu$ arbitrário, podemos rescrever essa relação como uma lei de conservação

$$\int_{\partial R} J_\nu^\mu d\sigma_\mu = 0, \quad (1.35)$$

que pelo teorema de Gauss é o mesmo que escrever:

$$\partial_\mu J_\nu^\mu = 0, \quad (1.36)$$

com a equação acima representando o resultado central do teorema de Noether na sua forma covariante. O resultado obtido demonstra que a quantidade J_ν^μ é conservada para

as transformações que tornam a Lagrangeana e consequentemente a ação invariantes. Em especial para sistemas que são invariantes para translações no espaço-tempo

$$J_\nu^\mu = -\theta_\nu^\mu, \quad (1.37)$$

ou seja, o tensor energia-momento é conservado. As soluções obtidas para os modelos de campo tipo do kink que serão abordadas mais a frente, derivam de modelos em que a Lagrangeana é um escalar de Lorentz e consequentemente são invariantes para translações no espaço-tempo, o que torna essa descrição essencial.

1.1.3 Equação de Klein-Gordon

A equação de Klein-Gordon surgiu de uma tentativa de se obter as equações de movimento para objetos quânticos relativísticos, assim como a equação de Schrodinger descreveria estes mesmos no limite não relativístico. Ela foi deduzida em 1926 por Oskar Klein [23] e Walter Gordon [24]. Inspirados pelos trabalhos de L. De Broglie e E. Schrodinger a respeito das ondas de matéria e da formulação ondulatória da mecânica quântica em geral. Para alcançarem o resultado final imaginaram que a quantização teria um papel fundamental na descrição dos fenômenos ao mesmo tempo em que a relatividade especial também deveria estar presente na construção do formalismo. Esta forma de pensar levou estes a acreditar, que para obter tal equação, deveriam derivar a equação a partir de uma relação que tivesse alguma ligação com as equações da dinâmica relativística, fazendo um paralelo, a equação de Schrodinger parte de uma relação de energia para uma partícula não relativística, esta representada por um Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}). \quad (1.38)$$

Analogamente poderiam então partir de uma relação dinâmica que carregasse a estrutura relativística. Essa estrutura é o 4-momento de uma partícula relativística $P^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$

$$P_\mu P^\mu = P_0 P^0 - P_i P^i = m_0^2 c^2, \quad (1.39)$$

da qual se obtém a relação de dispersão

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2, \quad (1.40)$$

onde m_0 é a massa de repouso da partícula. Então partindo da ideia de que a quantização desempenhava papel relevante na descrição, o próximo passo era introduzir a primeira quantização para a relação de dispersão, ou seja, a prescrição operatorial da mecânica quântica para energia $E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ e para momento $p = -i\hbar \vec{\nabla}$, que nada mais é do que a quantização dos operadores. A partir disso obtém-se uma equação que atua sobre os campos $\phi(\vec{r}, t)$

$$(E^2 - p^2 c^2)\phi(\vec{r}, t) = m_0^2 c^4 \phi(\vec{r}, t), \quad (1.41)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right) \phi(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.42)$$

rescrevendo em unidades naturais $\hbar = c = 1$

$$(\square + m_0^2) \phi(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.43)$$

A equação de Klein-gordon apresentava alguns problemas como o fato de a relação de dispersão descrever soluções de energia positiva e negativa [25]

$$E = \pm c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}, \quad (1.44)$$

o significado disso não era claro. Outro problema era o fato dessa equação não ser capaz de explicar a presença do spin nos elétrons, propriedade essa observada nos experimentos de deflexão por campos magnéticos com átomos de alumínio, conhecidos como experimentos de Stern-Gerlach. A estrutura matemática da equação de Schrodinger não poderia descrever os spins do elétron para o átomo de hidrogênio, pois nela cada número quântico descrito estava associado à um grau de liberdade da equação. O problema foi resolvido a posteriori pelos trabalhos de W. Pauli que incorporou objetos chamados de espinores a uma forma modificada da equação de Schrodinger, obtendo assim uma equação não-relativística para o átomo de hidrogênio. A explicação para as soluções de energia negativa encontraram paralelo com um novo conceito que estava surgindo na física, o das anti-partículas, conceito este aprimorado por P. Dirac em seus trabalhos relativos ao estudo de uma equação relativística para os elétrons. A comprovação experimental veio em 1932 por C. Anderson na descoberta do pósitron (Anti-partícula do elétron). Por fim, a equação de Klein-Gordon se mostrou adequada para explicar interações de partículas que possuíam spin-0, em especial os mésons- π que estariam por trás das interações fortes que mantinham os núcleos atômicos coesos.

1.1.4 Lagrangeana do campo de Klein-Gordon

A obtenção da densidade Lagrangeana do campo de Klein-Gordon permite extrair informações sobre as leis de conservação. Para reconstruir a densidade Lagrangeana através das equações de movimento que foram obtidas partir de uma relação de dispersão que atua como operador sobre um campo escalar real. É necessária a utilização da equação Euler-Lagrange [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= -m_0^2 \phi \rightarrow \mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + F(\partial_\mu \phi), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} &= \partial^\mu \phi \rightarrow \mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) + G(\phi), \end{aligned}$$

onde $F(\partial_\mu \phi)$ e $G(\phi)$ são funções dos parâmetros independentes que descrevem a Lagrangeana. Tais termos são tratados como constantes ao se obter derivadas de termos distintos. Por inspeção fica fácil ver quem são essas funções, basta usar a integrabilidade, ou seja

como estamos tratando da mesma densidade Lagrangeana, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$, o que implica que $\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial(\partial_\mu \phi)}$ e que $\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \phi}$, concluindo que $F = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)$ e que $G = -\frac{1}{2}m_0^2 \phi^2$. A densidade Lagrangeana pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m_0^2 \phi^2. \quad (1.45)$$

Ao analisarmos a expressão que descreve a interação do campo de Klein-gordon real, vemos que esta não dependem explicitamente das coordenadas do espaço-tempo, portanto é invariante para translações, ou seja, a quantidade conservada é o próprio tensor energia momento (eq.1.30), que pode ser então obtido como sendo:

$$\theta_\nu^\mu = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mathcal{L} \delta_\nu^\mu, \quad (1.46)$$

onde o termo θ_0^0 é chamado de densidade de energia

$$\theta_0^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2, \quad (1.47)$$

A energia do sistema é obtida a partir da integração dessa expressão

$$E = \int dx^D \theta_0^0 = \int dx^D \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 \right). \quad (1.48)$$

Outra relação que podemos exprimir a partir do tensor de energia-momento é a densidade de momento

$$\theta_v^0 = P_v, \quad (1.49)$$

a partir da equação acima é possível calcular o quadri-momento como a integral sobre o volume D-dimensional:

$$p_\nu = \int dx^D P_\nu, \quad (1.50)$$

neste caso é fácil mostrar que p_ν é a constante de movimento, ou quantidade conservada do sistema, ou seja

$$\partial_0 \theta_v^0 = \partial_0 p_v = 0, \quad (1.51)$$

mostrando que, o momento é constante no tempo. Poderíamos agora supor que o campo de Klein-Gordon é complexo e não mais real, neste caso teríamos uma solução de campo para ϕ e para seu conjugado complexo ϕ^*

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (1.52)$$

$$(\square + m^2)\phi^* = 0, \quad (1.53)$$

ao multiplicarmos a primeira equação pelo seu conjugado complexo à esquerda e a segunda pelo seu equivalente não conjugado a esquerda, obtemos duas expressões que ao subtrairmos ambas as equações entre si, também devemos obter um resultado equivalente a zero, portanto obtemos a seguinte expressão

$$\phi^* \square \phi - \phi \square \phi^* = 0, \quad (1.54)$$

que podemos reescrever de maneira equivalente como

$$\phi^* \partial_0^2 \phi - \phi \partial_0^2 \phi^* + \phi^* \partial_i \partial^i \phi - \phi \partial_i \partial^i \phi^* = 0, \quad (1.55)$$

$$\partial_0(\phi^* \partial^0 \phi - \phi \partial^0 \phi^*) + \partial_i(\phi^* \partial^i \phi - \phi \partial^i \phi^*) = 0, \quad (1.56)$$

de modo que podemos identificar a presença de uma lei de conservação através da equação de continuidade acima. Podemos portanto traçar paralelos para as expressões, como, $\rho = (\phi^* \partial^0 \phi - \phi \partial^0 \phi^*)$ a identificando como uma densidade de probabilidade ao multiplicar $\frac{i\hbar}{2m}$, que é neste caso conservada. Podemos identificar como uma densidade de corrente de probabilidade a expressão $j^i = (\phi^* \partial^i \phi - \phi \partial^i \phi^*)$ ao multiplicar por $\frac{i\hbar}{2m}$. Com essas duas expressões podemos construir a quadri-corrente $J^\mu = (\rho, j^i)$, e de modo geral temos a lei de conservação na sua forma covariante

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (1.57)$$

A mesma expressão poderia ser obtida utilizando o teorema de Noether, ao utilizar que temos dois campos ϕ e ϕ^* , com as transformações abaixo que deixam a Lagrangeana invariante

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi, \quad (1.58)$$

$$\phi^* \rightarrow \phi^{*'} = e^{-i\alpha} \phi^*, \quad (1.59)$$

onde α é uma constante de valor muito pequeno. A partir da equação (eq.1.31):

$$J^\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(i\phi) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)}(i\phi^*) \right), \quad (1.60)$$

que leva a uma expressão idêntica à obtida anteriormente. É interessante notar que ao obtermos a expressão acima, obtemos algo que é bem próximo do que podemos encontrar para a equação de Schrodinger da mecânica quântica. Voltando a discussão da seção anterior, foi mostrado que a equação de Klein-Gordon apresentava alguns problemas, como a presença de soluções com a energia não definida positivamente, isso representava um empecilho para a teoria. Aos tratarmos do campo de Klein-Gordon complexo, é definida que a componente θ_0^0 é a densidade de energia do campo, assumindo valores tanto positivos quanto negativos. De modo equivalente o problema ocorre à $J^0 = \rho$ que está associada a θ_0^0 através da (eq.1.37), sendo ρ não definida positivamente. O problema aqui acontece ao tentar interpretar essa expressão assim como é feita na mecânica quântica, como densidades de probabilidades. A solução do problema se dá ao interpretar ρ e j^i como densidades de carga e densidade de corrente de carga, dessa forma estamos falando que o campo de Klein-gordon complexo é um campo carregado, e que o campo escalar real, com $\phi = \phi^*$ leva ao resultado $\rho = 0$ e $j^i = 0$, ou seja, o campo de Klein-Gordon real é interpretado como um campo descarregado. A carga presente no campo complexo distingue as soluções de energia positiva e de energia negativa sobre a forma de partículas e anti-partículas que possuem spin-0.

2 Defeito topológico - kink

Os kinks são soluções de equações de movimento não lineares, caracterizados como um defeito topológico unidimensional ($D = 1$). Eles surgem em contextos de modelos com quebra espontânea de simetria, possuem energia bem localizada e não-dissipativa. Isso significa que tem uma grande estabilidade, podendo manter sua forma por grandes períodos de tempo. Todas essas propriedades estão descritas nesta seção.

2.1 Campo escalar com simetria discreta Z_2

Os kinks Z_2 surgem de teorias de campo que possuem simetria discreta do tipo Z_2 ou seja, simetria de reflexão. Para um campo escalar real ϕ , a Lagrangeana que descreve esses campos deve ser invariante para a transformação $\phi \rightarrow -\phi$. Seja um campo escalar real ϕ em 1+1-dimensões, com a ação [26]

$$S = \int d^2x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \right), \quad (2.1)$$

é fácil mostrar que a consequência principal da invariância reflexional é a de que o potencial tenha a forma, $V(\phi) = V(-\phi)$. Um exemplo de potencial que tenha estas características é o descrito abaixo

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \rho^2)^2, \quad (2.2)$$

que pode ser rescrito como

$$V(\phi) = -\frac{\lambda \rho^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 + \frac{\lambda \rho^4}{4}, \quad (2.3)$$

o interessante aqui é que a princípio não conhecemos as constantes de ajuste λ e ρ e nem suas propriedades. Algo de interesse é calcular os valores extremos (isso se houver a presença) do potencial, ou seja

$$\left(\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \right)_{\phi=\phi_0} = 0, \quad (2.4)$$

onde ϕ_0 são os valores do campo que satisfazem a equação acima. Aplicando a condição mencionada foi obtida a equação abaixo

$$-\lambda \rho^2 \phi + \lambda \phi^3 = 0, \quad (2.5)$$

após algum algebrismo, as soluções ϕ_0 que extremizam a função potencial $V(\phi)$, $\phi_0 = 0$ e $\phi_0 = \pm \rho$, sendo essas soluções triviais do campo. Um próximo passo a ser seguido seria o de avaliar se esses pontos correspondem a máximos ou mínimos do potencial e se as

constantes de ajuste tem algum papel nisso, se sim, qual? Fazendo a análise dos termos de derivadas segundas para o potencial

$$\left(\frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^2}\right)_{\phi=\phi_0} = -\lambda\rho^2 + 3\lambda\phi^2 = f(\phi), \quad (2.6)$$

podemos então a partir disso analisar o sinal da função $f(\phi)$ para as soluções triviais do campo

Caso em que $\phi_0 = 0$:

$$f(\phi_0 = 0) = -\lambda\rho^2,$$

podemos deduzir também que $\rho^2 > 0$, pois trabalhamos com um campo escalar real, que deve oferecer valores escalares que sejam números reais. Para o parâmetro λ , teríamos dois casos, se $\lambda > 0$ então $f(\phi) < 0$, portanto $\phi_0 = 0$ é um máximo local, se $\lambda < 0$ então $f(\phi) > 0$ concluindo que é um mínimo local.

Caso em que $\phi_0 = \pm\rho$:

$$f(\phi = \pm\rho) = 2\lambda\rho^2$$

se neste caso $\lambda > 0$ isso implica que $f(\phi) > 0$, então $\phi_0 = \pm\rho$ são mínimos, se $\lambda < 0$ teríamos $f(\phi) < 0$, portanto pontos de máximo global. Contudo devemos nos atentar que naturalmente os sistemas decaem para estados de menor energia, devemos então atentar para as condições em que

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}\right)_{\phi=\phi_0} > 0, \quad (2.7)$$

para tal teríamos um sistema que para $\lambda < 0$ o mesmo possuísse apenas um único vácuo em $\phi_0 = 0$, enquanto que para $\lambda > 0$ este sistema teria dois vácuos degenerados em $\phi_0 = \pm\rho$. Portanto um sistema em que a transição de valores do parâmetro λ gera um efeito em que um vácuo trivial decaí em dois vácuos degenerados, demonstrando assim a quebra de simetria do sistema, assim a operação $\phi \rightarrow -\phi$ leva a duas soluções distintas (dois estados de vácuo distintos). A equação de movimento gerada pela ação deste potencial é obtida a partir das equações de Euler-Lagrange para o campo, sendo estas

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \lambda(\phi^2 - \rho^2)\phi = 0, \quad (2.8)$$

onde $\phi(x, t) = \pm\rho$ são chamadas de soluções triviais do campo (vácuos). Para simplificar as soluções da equação de movimento podemos reescalar o sistema ao introduzir uma mudança de variáveis. Ao fazer $\Phi = \frac{\phi}{\rho}$ e $y^\mu = \sqrt{\lambda}\rho x^\mu$, escrevemos a ação

$$S = \rho^2 \int \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{1}{4}(\Phi^2 - 1)^2 \right) dy^\mu, \quad (2.9)$$

onde o termo ρ^2 , por ser um parâmetro global da ação, não tem portanto qualquer função na equação de movimento do campo. Assim as equações de movimento podem ficar livres de parâmetros adicionais a serem ajustados para a dinâmica do campo, basta por fim fazer a análise dimensional adequada dos resultados obtidos a partir do modelo.

2.2 Teorema de Derrick

O teorema de Derrick está diretamente relacionado ao problema de se obter soluções estáticas de energia finita (não divergente) em teorias de campo escalar com altas dimensões, que são as soluções de interesse para a física em um contexto geral [27, 28]. Podemos analisar isso em um contexto de reescala das soluções, inicialmente partimos da relação de energia obtida na (eq.1.49) fazendo a generalização para D dimensões. Para a solução estática, não temos os termos de derivadas temporais do campo, portanto

$$E[\phi] = \int dx^D \left(\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \right), \quad (2.10)$$

ao integrarmos termo a termo, obtemos que a energia da solução é da forma

$$E = E_{grad} + E_V. \quad (2.11)$$

Fazendo uma reescala da solução $\phi_c = \phi(cx^i)$ e $y^i = cx^i$, com $i = 1, \dots, D$, temos que o funcional da energia pode ser reescrito como

$$E[\phi_c] = \int c^D dx^D \left(\frac{1}{2} (\nabla \phi_c)^2 + V(\phi_c) \right), \quad (2.12)$$

$$E[\phi_c] c^{-D} = \int dx^D \left(\frac{c^2}{2} (\nabla \phi_c)^2 + V(\phi_c) \right) = c^{2-D} E_{grad} + c^{-D} E_V = 0,$$

deste modo podemos encontrar a solução que minimiza o funcional fazendo a derivada funcional de $E(\phi_c)$ em relação ao parâmetro de reescala:

$$\left(\frac{dE[\phi_c]}{dc} \right)_{c=1} = 0, \quad (2.13)$$

que fornece a seguinte equação

$$(D - 2)E_{grad} + DE_V = 0, \quad (2.14)$$

onde para:

- Para $D = 1$. Há uma solução estática que satisfaz a seguinte relação $E_{grad} = E_V$, essas soluções são chamadas de kinks, soluções essas que podem ser encontradas a partir da equação de Bogomol'nyi.
- Para $D = 2$. Haverá soluções estáticas quando a energia relativa a interação do potencial do modelo for igual a zero $E_V = 0$.

Vemos então que nestas condições conseguimos obter soluções estáticas e estáveis para modelos de D dimensões. Porém essa é uma condição necessária, mas não suficiente, dado que existem soluções estáticas de modelos de $D = 1$ dimensões que não são soluções de energia finita, como as soluções estáticas da equação de Klein-Gordon, discutida anteriormente.

2.3 Equação de Bogomol'nyi

O método de Bogomol'nyi consiste em obter as soluções estáveis de mínima energia, conhecidas como soluções **BPS** através da resolução de equações diferenciais de segunda ordem (equação dinâmica do campo) reduzindo-as a equações de primeira ordem[29]. São caracterizadas por potenciais cujo os zeros coincidem com os pontos de mínimo, isso significa que definem os estados de mínima energia. Podemos escrever um potencial limitado inferiormente como

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2(\phi), \quad (2.15)$$

onde $W_\phi(\phi)$ é uma função suave (contínua e diferenciável) definida como sendo $W_\phi = \frac{dW}{d\phi}$, tal que

$$W_\phi = \sqrt{2V(\phi)}. \quad (2.16)$$

Para obter as soluções, partimos de uma abordagem geral dos modelos de campos escalares, mas nosso interesse está em soluções em que o campo dependa apenas de uma dimensão espacial. A equação de movimento é escrita como se segue

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.17)$$

tal que para um campo estacionário $\phi = \phi(x)$, temos

$$-\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.18)$$

Através de métodos algébricos aplicados para a equação acima, obtemos

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi) + C}, \quad (2.19)$$

onde a constante C deve ser nula de modo a evitar divergências no calculo do funcional de energia. Ao integrarmos a expressão acima obtemos as soluções estáticas

$$x - x_i = \pm \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(\infty)} \frac{d\phi}{\sqrt{2V(\phi)}}, \quad (2.20)$$

onde a função inversa obtida nos dá a função que descreve este campo

$$F(\phi) = \int \frac{d\phi}{\sqrt{2V(\phi)}}, \quad (2.21)$$

de maneira geral obtemos que a função real que descreve o campo escalar é a função inversa da integral obtida.

$$\phi_s(x) = \pm F^{-1}(x - x_i). \quad (2.22)$$

As soluções **BPS** são estáveis e possuem energia associada não divergente, de modo que a energia da solução estática neste caso pode ser calculada a partir da componente θ_0^0 do tensor energia momento

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_0^0 dx, \quad (2.23)$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx, \quad (2.24)$$

de maneira que podemos rescrever esse resultado em sua forma quadrática

$$E = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 dx \mp \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d\phi}{dx} \sqrt{2V(\phi)} dx \right) \right], \quad (2.25)$$

usando os resultados (Eq.2.16) e (Eq.2.19), definimos a energia da solução como finita e localizada.

$$E = \int_{\phi(-\infty)}^{\phi(\infty)} dW = (W(\phi(\infty)) - W(\phi(-\infty))), \quad (2.26)$$

o resultado acima mostra, que a energia associada a solução depende apenas do comportamento assintótico do campo. Mais a frente veremos que esse comportamento assintótico que garante a energia ser finita e localizada está diretamente relacionado com a topologia da solução

2.4 Estabilidade linear das soluções

Nesta seção analisaremos a estabilidade linear das soluções estacionárias. A análise em questão é feita introduzindo uma pequena perturbação em torno da solução estática obtida. Essa análise permite identificar os modos ligados associados ao modelo, ingrediente fundamental no processo de colisão kink-antikink. Inserindo uma pequena perturbação em torno da solução $\phi(x, t) = \phi_s(x) + \eta(x, t)$, e substituindo na equação de movimento, ficamos com

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.27)$$

como estamos tratando de perturbações bem pequenas, faz se necessário a análise do comportamento do potencial relacionado ao modelo para estas pequenas oscilações $V(\phi) = V(\phi_s + \eta)$. Expandimos então o potencial em uma série de Taylor em torno da solução estacionária $\phi_s(x)$, e de maneira equivalente podemos fazer a expansão em serie de Taylor para a derivada do potencial

$$\frac{dV}{d\phi} = \left(\frac{dV}{d\phi} \right)_{\phi=\phi_s} + \left(\frac{d^2V}{d\phi^2} \right)_{\phi=\phi_s} \eta + \left(\frac{1}{2!} \frac{d^3V}{d\phi^3} \right)_{\phi=\phi_s} \eta^2 + \dots \quad (2.28)$$

É interessante notar que a análise de estabilidade é feita a partir de uma perturbação bem pequena, ocasionalmente o valor nominal dela deve ser da forma $\eta \ll 1$ e isso nos leva a considerar que para termos de expoente muito grande o valor de $\eta \rightarrow 0$, sendo assim preservando apenas os termos lineares da aproximação, ficamos com

$$\frac{dV}{d\phi} = \left(\frac{dV}{d\phi} \right)_{\phi=\phi_s} + \left(\frac{d^2V}{d\phi^2} \right)_{\phi=\phi_s} \eta. \quad (2.29)$$

Substituindo a (eq.2.29) na (eq.2.27), e utilizando a equação de Bogomol'nyi, temos

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \left(\frac{d^2V}{d\phi^2} \right)_{\phi=\phi_s} \eta = 0, \quad (2.30)$$

introduzindo a seguinte solução via separação de variáveis $\eta(x, t) = \psi(x)T(t)$, e substituindo na EDP

$$\frac{d^2 T}{dt^2} \frac{1}{T} = -\omega_n^2, \quad (2.31)$$

$$-\frac{d^2 \psi}{dx^2} \frac{1}{\psi} + \left(\frac{d^2 V}{d\phi^2} \right)_{\phi=\phi_s} = \omega_n^2, \quad (2.32)$$

o trabalho a partir dessas equações consiste em provar que $\omega_n^2 \geq 0$ para todo n , caso contrário, a solução temporal $T(t)$ teria a forma

$$T(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}, \quad (2.33)$$

se considerarmos um sistema que no tempo inicial não há oscilação $T(0) = 0$, teríamos que

$$T(t) = 2A \sinh(\omega t) \quad (2.34)$$

o que implicaria que para $t \rightarrow \infty$, a solução $T(t)$ divergiria, logo a solução de onda viajante para o campo não seria estável. Para mostrar que $\omega_n^2 \geq 0$ devemos voltar a atenção para equação do tipo Schrodinger [30]

$$\hat{H}\psi = \omega^2 \psi, \quad (2.35)$$

onde $\hat{H}$ pode ser visto como um operador diferencial, então dito isto, basta provar que o hamiltoniano é sempre positivo o que leva a autovalores ω_n positivos

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{V}(x), \quad (2.36)$$

$$\mathcal{V}(x) = \left(\frac{d^2 V}{d\phi^2} \right)_{\phi=\phi_s}. \quad (2.37)$$

partindo da (eq.2.15) e (eq.2.19) podemos rescrever a equação do tipo Schrodinger como

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + (W_{\phi\phi}^2 + W_{\phi}W_{\phi\phi\phi})_{\phi=\phi_s}, \quad (2.38)$$

pela expressão acima podemos extrair os operadores $S_{\pm}^{\dagger}$ e $S_{\pm}$, onde $\hat{H} = \hat{S}_{\pm}^{\dagger} \hat{S}_{\pm}$. Esses operadores são hermitianos $\hat{S}_{\pm}^{\dagger} = \hat{S}_{\pm}$

$$\hat{S}_{\pm}^{\dagger} = \left(\frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi} \right)_{\phi=\phi_s}, \hat{S}_{\pm} = \left(-\frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi} \right)_{\phi=\phi_s}, \quad (2.39)$$

partindo destes operadores é possível mostrar que os autovalores da equação são todos $\omega_n^2 \geq 0$

$$\langle H \rangle = \langle \psi^* | \hat{S}_\pm^\dagger \hat{S}_\pm | \psi \rangle = \langle \psi^* | \omega_n^2 | \psi \rangle, \quad (2.40)$$

$$\langle \psi^* | \hat{S}_\pm^\dagger \hat{S}_\pm | \psi \rangle = \langle \psi^* | \hat{S}_\pm^\dagger | \hat{S}_\pm \psi \rangle = \langle (\hat{S}_\pm \psi)^* | \hat{S}_\pm^\dagger | \psi \rangle = \langle \psi^* | \hat{S}_\pm^\dagger \hat{S}_\pm | \psi \rangle, \quad (2.41)$$

que leva na forma de um produto quadrático [31]

$$\langle \psi^* | (\hat{S}_\pm^\dagger)^2 | \psi \rangle = \langle \psi^* | \omega_n^2 | \psi \rangle \geq 0, \quad (2.42)$$

este resultado então demonstra a estabilidade da solução para pequenas perturbações das soluções obtidas via método de Bogomol'nyi.

2.5 Topologia e carga topológica

De modo geral a solução obtida através da equação de Bogomol'nyi pode descrever duas classes de defeitos, os kinks (topológicos) e lumps (não topológicos) em ($D=1$). Essa característica topológica é sintetizada pela chamada carga topológica Q , onde para $Q \neq 0$ temos as chamadas soluções topológicas. A carga Q possui dependência das propriedades assintóticas do campo, e descreve o grau de mapeamento deste [32]. Para mostrar que a carga é conservada, precisamos escrevê-la em função da corrente topológica, dada por

$$j^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (2.43)$$

onde $\mu, \nu = 0, 1$ e $\epsilon^{\mu\nu}$ é o pseudo-tensor de Levi-Civita. É fácil mostrar que essa equação representa uma lei de conservação

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi, \quad (2.44)$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (2.45)$$

onde podemos descrever uma carga para a integral espacial sobre a componente j^0 . A carga é descrita como

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} j^0 d^{D+1}x. \quad (2.46)$$

Para um modelo kink com solução de campo estático, a componente j^0 é escrita como

$$j^0 = \frac{1}{2} \epsilon^{01} \frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dx}, \quad (2.47)$$

substituindo a (eq.2.47) na (eq.2.46):

$$Q = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{dx} dx = \frac{1}{2} (\phi(\infty) - \phi(-\infty)), \quad (2.48)$$

para uma solução tipo kink temos que $\phi(\infty) \neq \phi(-\infty)$, ou seja uma solução topológica ($Q \neq 0$), a qual interliga dois pontos de mínimo do potencial. Para $\phi(\infty) = \phi(-\infty)$ temos as soluções do tipo lump não topológica ($Q = 0$).

3 Colisões Kink-Antikink

As colisões kink-antikink compreendem um processo de espalhamento de soluções obtidas através de campos escalares em (1,1)-dimensões. O interesse nessas colisões vem da enorme variedade de comportamentos observados devida a não-linearidade associada aos modelos e da velocidade inicial dos defeitos. Entre os comportamentos, um em especial, o comportamento two-bounce é foco de estudo, pois seu aparecimento ou supressão [33] está associado a presença de modos vibracionais nos modelos estudados.

3.1 Modelo ϕ^4

O modelo que compreende a teoria ϕ^4 dentro do contexto de defeitos topológicos do tipo kink é a descrição de um campo escalar real relativístico de (1+1)-dimensões, ou seja, $\phi = \phi(t, x)$ a este modelo se atribui uma simetria discreta do tipo Z_2 .

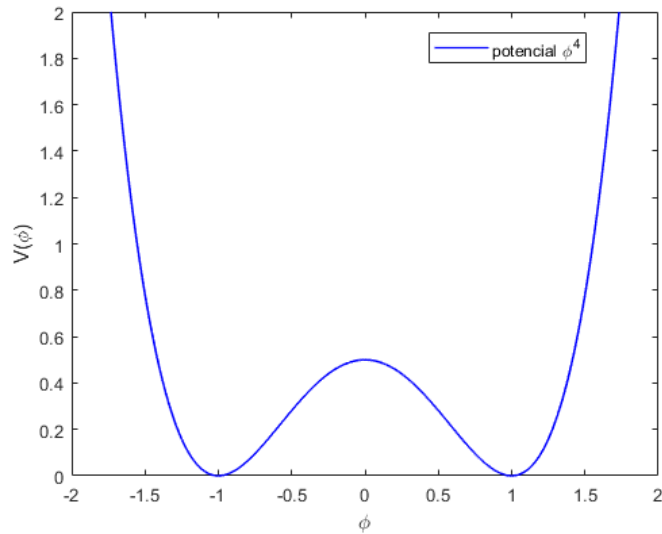


Figura 1 – Potencial do modelo ϕ^4 ; fonte: Autor

Este modelo apresenta dois vácuos degenerados $V(\phi) = 0$ em $\phi = \pm 1$ contendo um máximo local em $\phi = 0$, a Fig.1 representa a forma do potencial. A região entre vácuos é chamada de "setor topológico" e é chamado assim pois compreende a região de formação das soluções das equações de movimento do campo. O potencial é descrito da seguinte forma:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(\phi^2 - 1)^2. \quad (3.1)$$

Partindo da densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} (\phi^2 - 1)^2, \quad (3.2)$$

utilizando a ação e o princípio de Hamilton, obtemos as equações de movimento dada por

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2(\phi - \phi^3) = 0, \quad (3.3)$$

em acordo com o que foi descrito na seção de equação de Bogomol'nyi $\phi = \phi_s(x)$, podemos escrever as equações

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi)}, \quad (3.4)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm(\phi^2 - 1), \quad (3.5)$$

cujas as soluções obtidas são chamadas individualmente de kink e antikink

$$\phi_{K\bar{K}}(x) = \pm \tanh(x), \quad (3.6)$$

sendo a solução positiva o kink e a negativa o antikink. A quebra da simetria discreta leva uma solução à outra, de modo que $\phi_K = -\phi_{\bar{K}}$. Essas soluções têm a forma representada na Fig.2

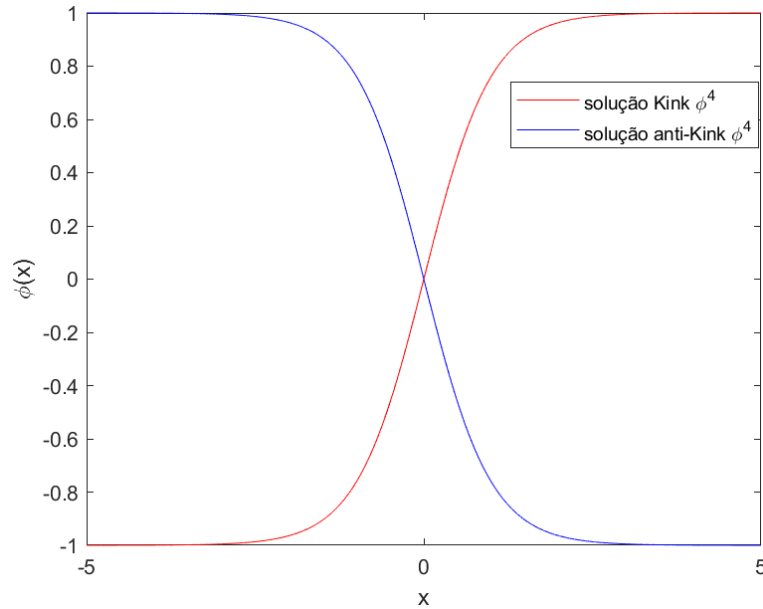


Figura 2 – Soluções de campo do modelo ϕ^4 ; fonte: Autor

Para analisar o processo de espalhamento kink-antikink, foi utilizado o software MATLAB para resolver numericamente a equação de movimento. Esse processo foi dividido em duas partes, inicialmente em um problema de valor inicial, do qual resolvemos a parte temporal da solução. Nessa etapa é necessário o uso das configurações iniciais do campo $\phi(x, t = 0)$ e das derivadas temporais do campo no tempo $\dot{\phi}(x, t = 0)$. Para obter as soluções

dependentes do tempo usamos as soluções estáticas obtidas via método de Bogomol'nyi. A partir destas soluções introduzimos o chamado boost de Lorentz, que nada mais é que uma mudança de referencial da solução, $x \rightarrow \gamma(x - v_i t)$, onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v_i^2}}$ é o chamado fator de lorentz e v_i é a velocidade inicial do kink. Essa mudança é possível, pois como discutido anteriormente, a lagrangeana que descreve o modelo é um escalar de Lorentz, portanto invariante para translações no espaço-tempo. Após construída a estrutura do PVI, o método utilizado para resolver esse problema foi o método de Runge-Kutta de quarta ordem [34], pois este se mostra como sendo o mais adequado dentre os tipos de métodos de Runge-Kutta, tanto pela precisão elevada, quanto pelo custo-benefício de serem necessários poucas etapas para se obter tal precisão. Para a parte espacial, o método utilizado é o de diferenças finitas, do qual introduzimos um problema de valor de contorno do tipo Dirichlet, onde usamos as condições de contorno que dependem essencialmente da maneira que a solução geral é montada na grade do programa. Ambos os métodos foram melhores detalhados nos apêndices (A1 e A2). Para obter os resultados das colisões usamos como base o artigo *Resonance structure in kink-antikink interactions in ϕ^4 theory* [35], neste trabalho é feita uma descrição completa do padrão fractal observado para as colisões do modelo ϕ^4 . No artigo é descrito que para colisões do par kink-antikink em um intervalo $v_i < 0.193$, são formados os estados armadilhados. Nessa região o par $K\bar{K}$ permaneceria preso por uma força atrativa entre eles, colidindo e se afastando entre si até que toda a energia no processo fosse dissipada na forma de radiação. Esse comportamento é conhecido como bión. Vale a pena destacar que para, o modelo ϕ^4 , não há distinção entre colisões $K\bar{K}$ e $\bar{K}K$, dado que o potencial de estabilidade do modelo apresenta simetria para $(x \rightarrow -x)$. Nesta seção vamos mostrar a colisão do par $\bar{K}K$. Note que é o mesmo comportamento obtido na [35] para a colisão $K\bar{K}$. A Fig.3 mostra o resultado do espalhamento do tipo bión. Perceba que o par se aproxima, colide e depois permanece com um movimento oscilante seguido por radiação.

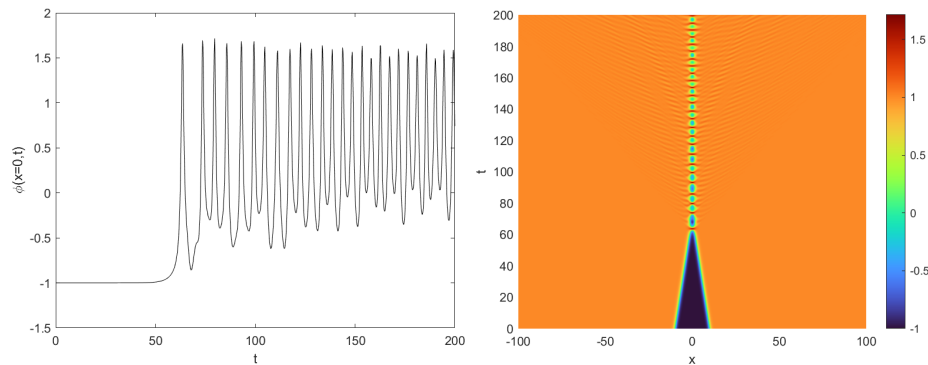


Figura 3 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x=0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Paras ambas figuras $v_i = 0.14$

Além deste estado, o artigo também descreveu o que é chamado de velocidade crítica, sendo esta o valor mínimo a partir do qual o par colide apenas uma vez de maneira

inelástica, antes de se separar de maneira definitiva. Para o modelo ϕ^4 essa velocidade é $v_c \approx 0.2598$.

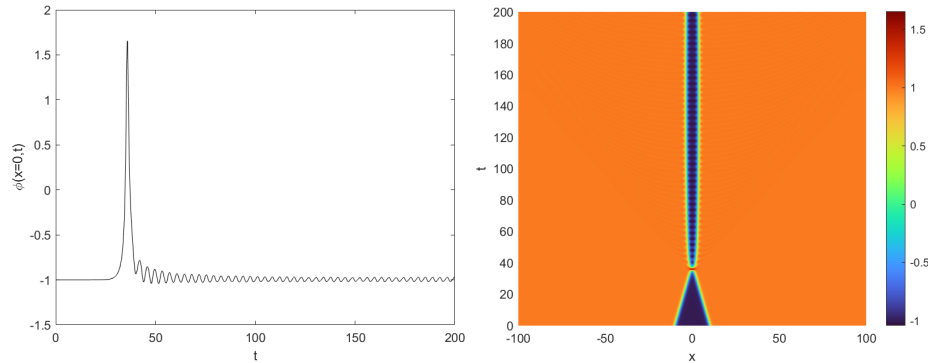


Figura 4 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Para ambas figuras $v_i = 0.2598$

O resultado apresentado na Fig.4 corresponde a um comportamento do tipo one-bounce. O pico pronunciado na Fig.4(a) representa o instante em que o par colide e depois se separa de maneira definitiva. Para regiões intermediárias ($v_i < v_c$), foi encontrada uma estrutura ressonante conhecida como janelas de two-bounces. Esse caso compreende da colisão do par $K\bar{K}$ por duas vezes antes da sua completa separação. Importante destacar que próximo as janelas de two-bounces, podem ser encontradas janelas de three-bounces e assim sucessivamente. Isso implica na presença de uma estrutura fractal. O comportamento do tipo two-bounces é observado nas Figs. 5 e 6. Cada uma delas representa uma diferente janela de two-bounces. Na Fig.5(a), existe apenas uma oscilação entre os dois saltos (que correspondem a colisão). Essa única oscilação indica que a colisão está na 1ª janela de two-bounces. Dessa forma, a Fig.5(c) corresponde a 2ª janela ($n = 2$), enquanto que as Figs.6(a) e 6(c) correspondem a oitava ($n = 8$) e nona ($n = 9$) janelas, respectivamente.

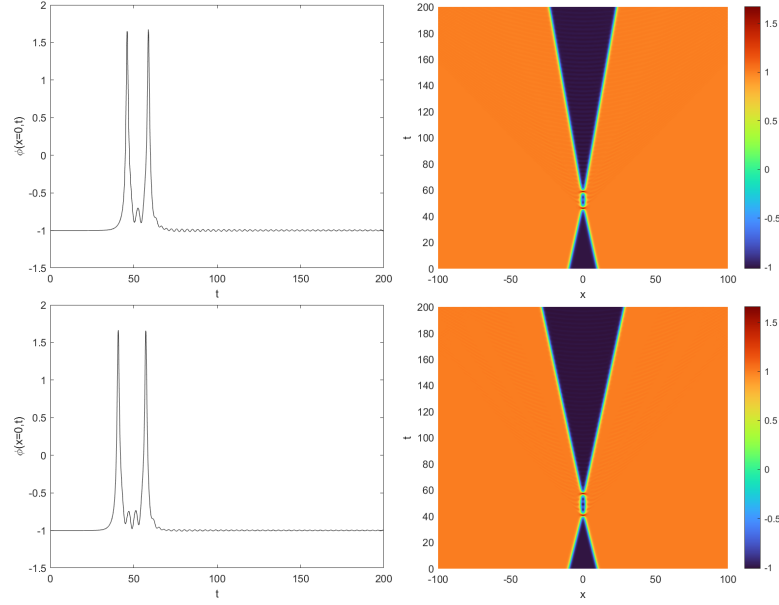


Figura 5 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x=0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Para ambas figuras $v_i = 0.198$; Primeira janela de two-bounce($n=1$); (c) Campo escalar no centro de massa $\phi(x=0, t)$ versus tempo e (d) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Para ambas figuras $v_i = 0.2265$; Segunda janela de two-bounce($n=2$)

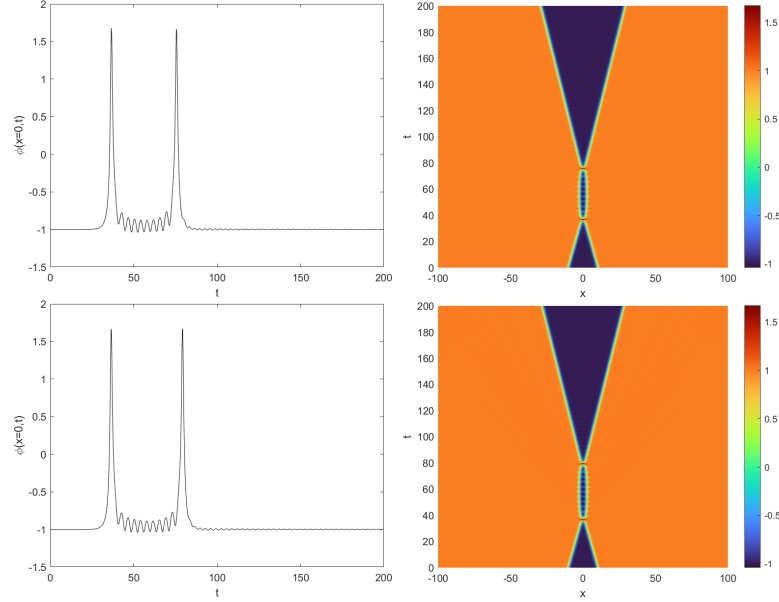


Figura 6 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x=0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Para ambas figuras $v_i = 0.25395$; Oitava janela de two-bounce($n=8$); (c) Campo escalar no centro de massa $\phi(x=0, t)$ versus tempo e (d) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Para ambas figuras $v_i = 0.2549$; Nona janela de two-bounce($n=9$)

Para entender melhor o fenômeno e a presença desse comportamento intrincado de janelas, devemos voltar a atenção ao comportamento da solução do modelo na presença de

pertubações, tal qual é feito na seção 2.5, de modo que obtemos o potencial de estabilidade (eq.2.37)

$$\mathcal{V}(x) = 6\phi_s^2 - 2 = 4 - 6\text{sech}^2(x), \quad (3.7)$$

também conhecido como potencial de Poschl-Teller modificado[36], que de maneira geral é descrito como

$$\mathcal{V}(x) = L^2 - L(L+1)\text{sech}^2(x), \quad (3.8)$$

descrevendo tanto o modelo ϕ^4 quando $L = 2$, quanto o modelo Sine-Gordon [37] para $L = 1$. Para o caso $L = 2$ que descreve o modelo de interesse nesta seção, podemos ver a forma deste potencial através da Fig.7

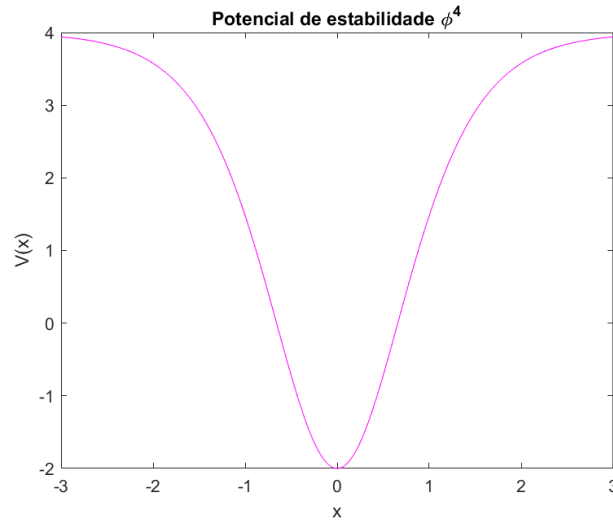


Figura 7 – Potencial de estabilidade ϕ^4 ; fonte: Autor

Ao substituir este potencial na equação que descreve a dependência espacial das perturbações (eq.2.32), obtemos a equação:

$$-\frac{d^2\psi_k}{dx^2} + (L^2 - L(L+1)\text{sech}^2(x))\psi_k = \omega_k^2\psi_k, \quad (3.9)$$

para obter a solução analítica desta equação devemos então fazer uma substituição de variáveis do tipo $u = \tanh(x)$, obtendo assim uma nova forma para a equação acima

$$\left[\frac{d}{du} \left((1-u^2) \frac{d}{du} \right) + L(L+1) - \frac{L^2 - \omega_k^2}{1-u^2} \right] \psi_k = 0, \quad (3.10)$$

esta equação é conhecida na literatura, como equação de Legendre generalizada. Esta equação possui dois conjuntos de soluções, uma delas correspondem aos polinômios normalizáveis, obtidos via truncamento em série. Tais soluções são chamadas de polinômios de Legendre associados P_L^m . Desse modo, podemos rescrever a equação acima por comparação com a equação de Legendre

$$\left[\frac{d}{du} \left((1-u^2) \frac{d}{du} \right) + L(L+1) - \frac{m^2}{1-u^2} \right] P_L^m(u) = 0, \quad (3.11)$$

onde identificamos $m^2 = L^2 - \omega_k^2$, onde podemos identificar (e ficará claro a seguir) $k = L - m$. Deste modo a equação (eq.3.9) tem o espectro discreto identificado como:

$$\omega_{L-m}^2 = L^2 - m^2, \quad (3.12)$$

pela imposição de que $\omega^2 \geq 0$, temos que $L \geq m$. Para $L = 2$, temos que $m = (1, 2)$. Poderíamos ter $m = 0$, o por que de isto não acontecer se deve ao fato de que as soluções dessa equação são as derivadas da solução que aparecem ao tentar expandir a própria solução em séries de Taylor, ou seja, as derivadas de ordem $n \geq 1$. Isso se conecta com a relação acima descrita, pois as soluções P_L^m são obtidas via formula de Rodrigues a partir das derivadas de ordem m das soluções da equação de Legendre. De modo que as soluções para $m = 0$ não são derivadas da solução com perturbação, portanto também não podem corresponder as soluções da (eq.3.9), isso ficará claro ao obtermos as soluções via comparação com a equação de Legendre. Partindo do resultado quando $m = L$, ou seja, $m = L = 2$, temos o autovalor $\omega_0^2 = 0$, que corresponde ao polinômio P_2^2 , que é equivalente ao polinômio ψ_0 :

$$P_2^2(x) = \psi_0(x) = \text{sech}^2(x), \quad (3.13)$$

esse resultado também pode ser obtido por uma expansão em Taylor correspondendo à primeira derivada da série

$$\frac{d\phi_s}{dx} = \frac{d}{dx} \tanh(x) = \text{sech}^2(x), \quad (3.14)$$

para $L = 2$ e $m = 1$, temos o autovalor $\omega_1^2 = 3$, correspondendo ao polinômio P_2^1

$$P_2^1(x) = \psi_1(x) = \text{sech}(x) \tanh(x), \quad (3.15)$$

que pode ser obtido de maneira equivalente pelo segundo termo da série de Taylor em torno da solução

$$\frac{1}{2} \frac{d^2\phi_s}{dx^2} = \text{sech}(x) \tanh(x). \quad (3.16)$$

Deste modo, a equação para o potencial de estabilidade do modelo ϕ^4 apresenta duas soluções, correspondentes ao modo translacional $\omega_0 = 0$ e ao chamado modo vibracional $\omega_1 = \sqrt{3}$, com soluções normalizadas correspondentes

$$\psi_0(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sech}^2(x),$$

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{sech}(x) \tanh(x).$$

A obtenção desses resultados é essencial para entender o surgimento das janelas de two-bounce para colisões do modelo ϕ^4 [38], isso se deve pela ação do mecanismo de troca de energia, também conhecido como mecanismo CSW [35]. O mecanismo diz que o par kink-antikink ao colidir pela primeira vez realiza uma troca de energia entre o modo

vibracional e o modo translacional presente no modelo. O par portanto ainda não possui energia suficiente para se libertar da força atrativa entre eles, de modo que este volta a colidir uma segunda vez, para então o modo vibracional fornecer energia suficiente para o modo translacional, para que por fim as duas soluções de onda viajantes se separem de maneira definitiva. As janelas de two-bounce portanto só aparecem quando há ressonância entre o modo vibracional ω_1 com a frequência associada a colisão, por meio do período entre colisões, descrito matematicamente como

$$\omega_1 T = 2\pi n + \delta, \quad (3.17)$$

onde n corresponde ao numero de oscilações entre os *bounces* da colisão, com T o período entre colisões, e δ é uma fase adicional. Portanto sendo crucial a presença de um modo vibracional no modelo para que haja este comportamento.

3.2 Modelo sinh-deformado

O modelo que compreende a teoria sinh-deformado [39, 40] é descrito por um campo escalar real de (1+1)-dimensões, $\phi = \phi(t, x)$. O potencial de interação possui dois vácuos degenerados que diferem do vácuo trivial em $V(0)$, como consequência direta da quebra espontânea de simetria presente no modelo. O potencial é escrito da seguinte forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \text{sech}^2(\phi) (1 - \sinh^2(\phi))^2, \quad (3.18)$$

com vácuos degenerados em $V(\phi) = 0 \rightarrow \phi = \pm \text{asinh}(1)$, configurando o chamado setor topológico.

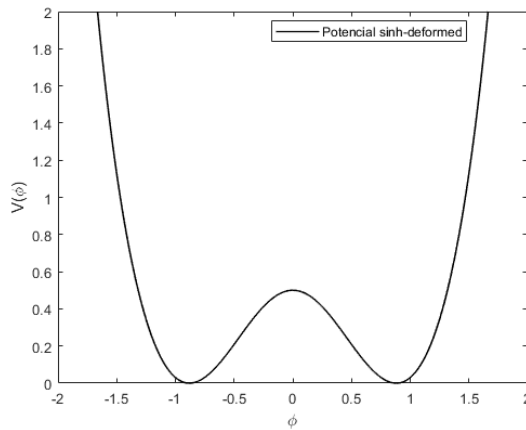


Figura 8 – Potencial sinh-deformado; fonte: Autor

partindo da densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \text{sech}^2(\phi) (1 - \sinh^2(\phi))^2, \quad (3.19)$$

obtemos a equação de movimento, dada por

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(\sinh(2\phi) - 8 \tanh(\phi) \operatorname{sech}^2(\phi)) = 0, \quad (3.20)$$

a solução dessas equações é fornecida via método de Bogomol'nyi. A solução estática é dada por

$$\phi_s(x) = \pm \operatorname{arcsinh}(\tanh(x)). \quad (3.21)$$

A estabilidade linear pode ser abordada com base na equação do tipo Schrodinger, onde o potencial de perturbação é descrito da seguinte forma

$$\mathcal{V}(x) = 2 \tanh^2(x) + \frac{8 \tanh^2(x) - 4}{(1 + \tanh^2(x))^2}. \quad (3.22)$$

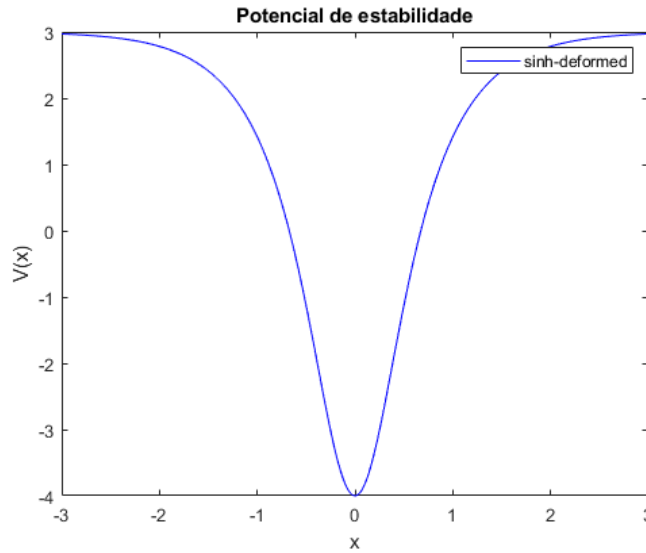


Figura 9 – Potencial de estabilidade; fonte: Autor

A Fig.9 representa o potencial $\mathcal{V}(x)$, onde pode ser encontrado um modo normal $\omega_0^2 = 0$ e um vibracional $\omega_1^2 = 1.89$ [39]. A partir das soluções obtidas (eq.3.21) é possível montar as condições iniciais dadas por

$$\phi(x, t) = \phi_K(\gamma(x - x_0 - v_i t)) + \phi_{\bar{K}}(\gamma(x + x_0 + v_i t)) - 1, \quad (3.23)$$

$$\dot{\phi}(x, t) = \dot{\phi}_K(\gamma(x - x_0 - v_i t)) + \dot{\phi}_{\bar{K}}(\gamma(x + x_0 + v_i t)), \quad (3.24)$$

onde a constante x_0 é justificada como o centro do kink e do antikink na malha, escolhidos simetricamente em relação ao centro $x = 0$. Lembrando que ao aplicar o boost de Lorentz estamos apenas fazendo uma troca de referencial inercial, deste procedimento resulta que $x \rightarrow \gamma(x - v_i t)$, onde $\gamma = \sqrt{1 - v_i^2}$.

A partir destas duas equações temos então as configurações iniciais do campo $\phi(x, 0) = \phi_0$ e $\dot{\phi}(x, 0) = v_0$. As condições de contorno são obtidas lembrando que o kink

tem uma solução que conecta os vácuos degenerados do potencial, portanto as condições de contorno adotadas são $\phi(x \rightarrow \pm\infty) = \pm \text{asinh}(1)$. Para a colisão, resolvemos a equação de movimento através dos métodos de diferenças finitas (Apêndice A1) com passo $\delta x = 0.19$ e Runge-Kutta (Apêndice A2) com passo $\delta t = 0.04$. Nós fixamos $x = \pm x_0$ com $x_0 = -12$, para a posição inicial do par, e definimos a malha em $x = \pm x_{max}$, onde $x_{max} = 200$. Com isso os resultados obtidos na colisão dependem apenas da mudança de velocidades v_i (velocidade inicial) entre os dois kinks na malha. Por meio destas configurações, inicialmente podemos notar que este modelo apresenta os chamados estados armadilhados (bión) para $v_i < 0.43$ na qual o par $K\bar{K}$ permanece após a colisão oscilando em torno do centro, como pode ser visto na Fig.10

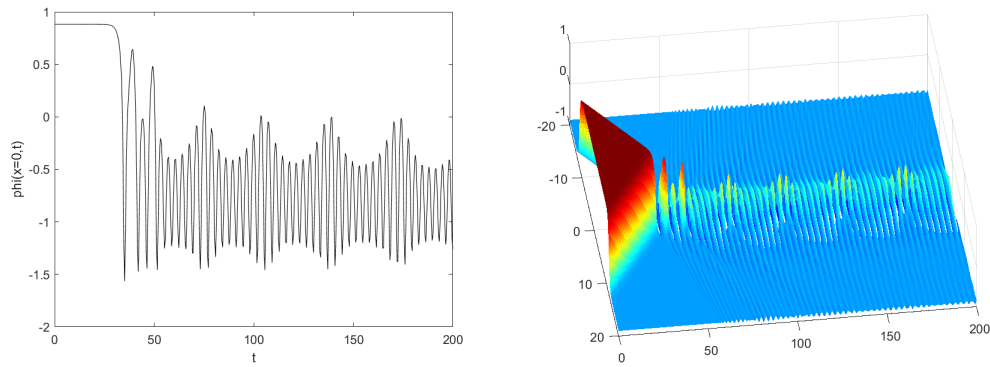


Figura 10 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x=0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão kink-antikink. Para ambas figuras $v_i = 0.33$

Um resultado interessante que este modelo apresenta, são as chamadas colisões do tipo two-bounce. Nesse caso, o kink se aproxima do antikink, colide uma primeira vez, se afastam, mas voltam a colidir e por fim, se separam novamente. Esse comportamento é alcançado para algumas faixas de velocidade, formando assim as janelas de two-bounce. A Fig.11 representa uma colisão de two-bounces. Uma característica importante a ser levada em conta, para se identificar janelas distintas, é o padrão de oscilações do kink entre os bounces (picos). Por exemplo, na Fig.11 percebemos que entre as colisões há apenas uma oscilação, isso determina que essa colisão pertence a primeira janela de two-bounce.

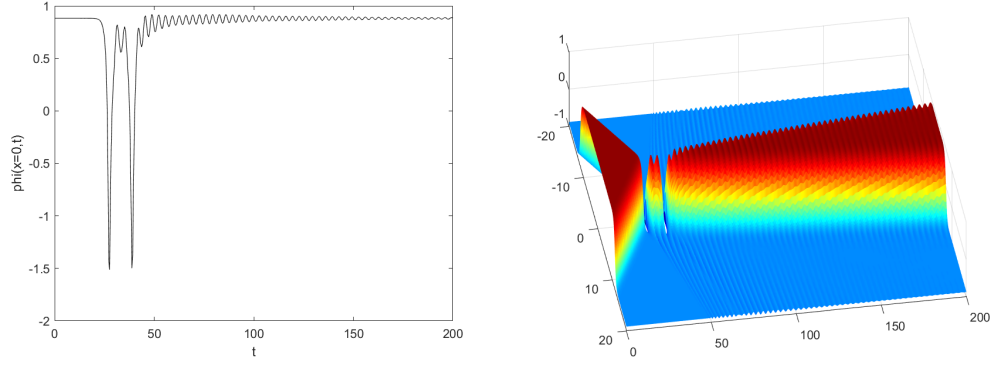


Figura 11 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x=0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão kink-antikink. Para ambas figuras $v_i = 0.43$

Na Fig.12 percebemos o kink-antikink colidindo por duas vezes, porém há duas oscilações entre os bounces, como pode ser visto na Fig.12a. Consequentemente, essa colisão de two-bounces pertence a segunda janela de ressonância. Portanto, aumentando a velocidade inicial dos kinks, vamos obter mais janelas de two-bounce. Além disso, as janelas diminuem de espessura com o aumento de v_i e se aglomeram próximo a velocidade crítica. A primeira janela se estende no intervalo $0.43 < v_i < 0.4326$, já a segunda compreende o intervalo $0.444 < v_i < 0.4457$.

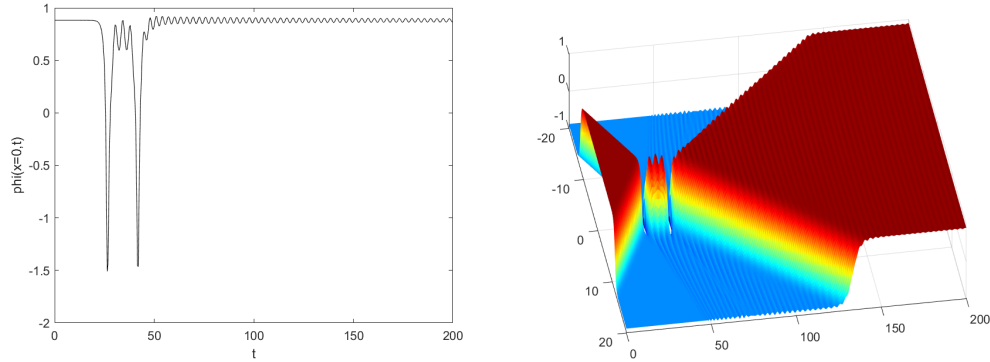


Figura 12 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x=0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão kink-antikink. Para ambas figuras $v_i = 0.445$

Colisões de maior ordem podem acontecer na borda das janelas de two-bounce, que corresponde a formação das janelas de three-bounce. A Fig.13a mostra o $\phi(x=0, t)$ em função do tempo e a Fig.13b mostra o espalhamento kink-antikink do campo $\phi(x, t)$, ambos com $v_i = 0.4439$. Devido a formação de janelas de ordem $n+1$ próximo as janelas de ordem n , isso caracteriza a formação de um comportamento fractal.

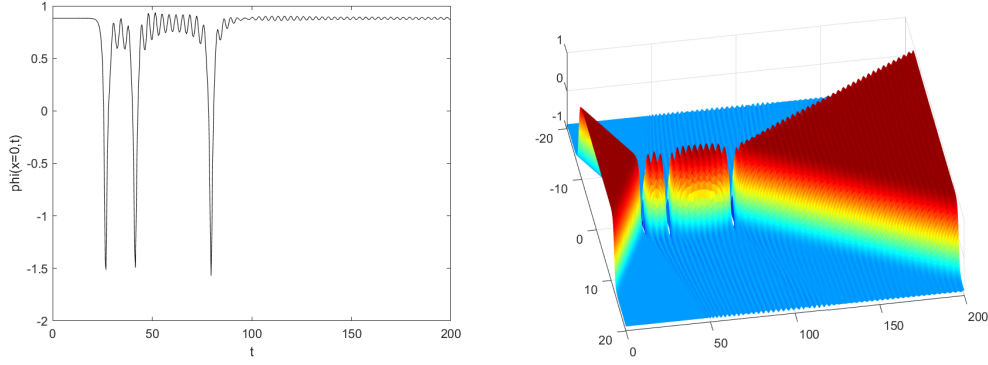


Figura 13 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x=0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão kink-antikink. Para ambas figuras $v_i = 0.4439$

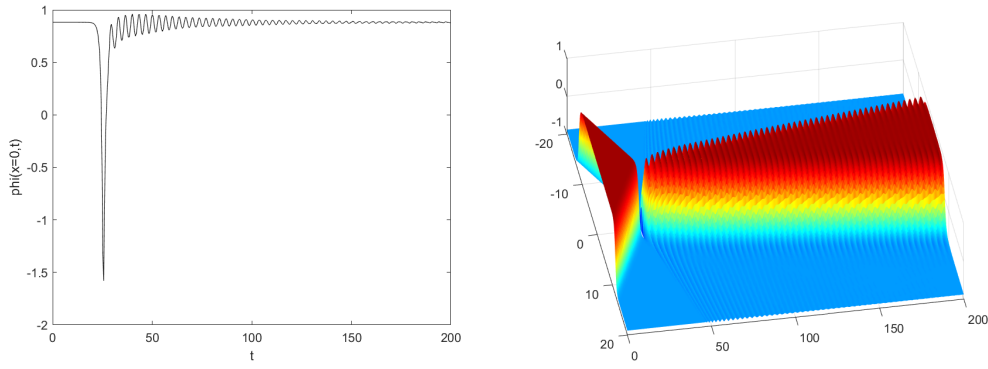


Figura 14 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x=0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão kink-antikink. Para ambas figuras $v_i = 0.465$

Além disso, podemos observar apenas uma colisão entre o par $K\bar{K}$, esse comportamento é conhecido como one-bounce, como observado Fig.14 Para $v_i > v_{cr} = 0.465$ o par colide uma vez e se separam inelasticamente com alguma radiação.

3.3 Modelo de solução de Klein-Gordon deformado

O modelo descrito nesta seção é obtido a partir da deformação da solução estática e do potencial para a equação de Klein-Gordon com campo escalar real, cujo potencial de interação é dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2, \quad (3.25)$$

para este potencial podemos obter uma solução estática unidimensional ϕ_s

$$\phi_s(x; a, b) = \frac{ae^x - be^{-x}}{2}, \quad (3.26)$$

onde a e b são constantes de uma combinação linear das duas soluções estáticas possíveis $e^{\pm x}$. Este potencial pode então ser reescrito após uma deformação pela função $f(\chi)$:

$$f(\chi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \chi^2}}. \quad (3.27)$$

O potencial (eq.3.25) ao ser deformado pela função (eq.3.27) assume a forma [41]:

$$V(\chi) = \frac{1}{2}(ab + (1 - ab)\chi^2)(1 - \chi^2)^2. \quad (3.28)$$

O potencial trabalhado nesta seção é descrito no artigo *Deformed defects with applications to braneworlds* [41]. Por simplicidade, escolhemos $a = 1$, assim o potencial é descrito como

$$V(\chi) = \frac{1}{2}(b + (1 - b)\chi^2)(1 - \chi^2)^2. \quad (3.29)$$

É importante destacar que esta simplificação em nada altera os resultados da análise feita para este modelo, sendo necessário uma atenção maior para comparar com os resultados encontrados. Neste modelo b é um parâmetro ajustável de modo que é de interesse analisar o comportamento da forma do potencial fazendo-se variar este parâmetro, tal comportamento pode ser visto na Fig.15.

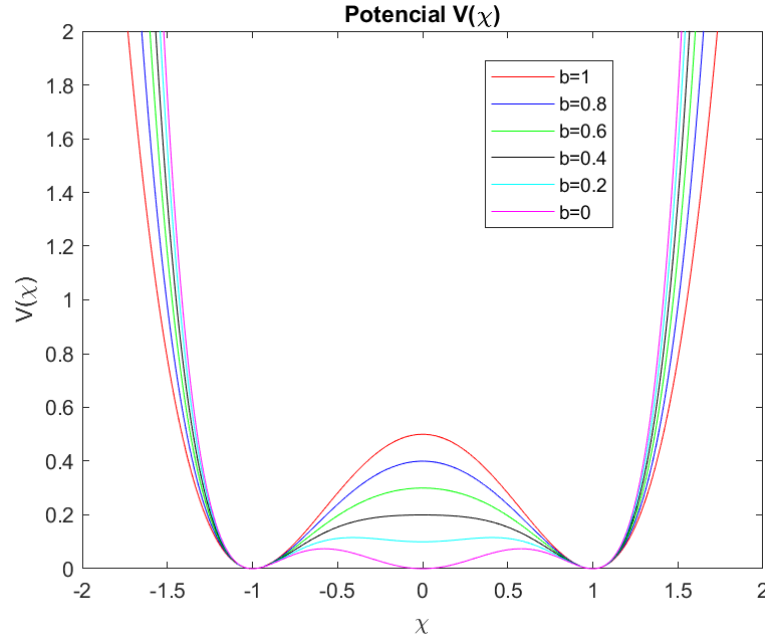


Figura 15 – Potencial deformado $V(\chi)$; Linha vermelha($b=1$); Linha azul($b=0.8$); Linha verde($b=0.6$); Linha preta($b=0.4$); Linha ciano($b=0.2$); Linha magenta($b=0$); fonte: Autor

Este modelo um comportamento interessante, ao variar o valor de b em um intervalo entre $b = 0$ e $b = 1$. Observamos que o máximo central diminui a medida que o parâmetro diminui, saindo de um extremo em que o potencial apresenta dois vácuos degenerados para um outro com três mínimos. Enquanto que em $b = 1$ temos dois vácuos formando um setor topológico, para $b = 0$ são formados dois setores topológicos que compreendem as regiões de vácuo entre $\chi \in (-1, 0)$ e $\chi \in (0, 1)$. É interessante observar que para $b = 1$ o modelo corresponde exatamente ao potencial do modelo ϕ^4 , com vácuos em $\phi = \pm 1$ e máximo central em $V(0) = \frac{1}{2}$. Enquanto que para $b = 0$, o modelo recai no potencial do modelo ϕ^6 [42, 43], ambos os modelos já descritos na literatura com uma boa base de

dados a respeito do comportamento das colisões entre kinks. A seguir vamos discutir a respeito da colisão $K\bar{K}$ na região de transição do potencial. O problema então consiste em obter as equações de movimento para o campo $\chi = \chi(t, x)$, para isso devemos escrever a densidade Lagrangeana para o modelo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \frac{1}{2} (b + (1-b)\chi^2)(1-\chi^2)^2, \quad (3.30)$$

utilizando o princípio de Hamilton obtemos as equações de movimento para o campo

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \chi(1-\chi^2)(3b\chi^2 - 3\chi^2 - 3b + 1) = 0, \quad (3.31)$$

cujas as soluções estáticas obtidas via deformação $\chi_s = \chi(x)$ são dadas por

$$\chi_s(x; b) = \pm \left(\frac{1}{2} \right) \frac{e^x - be^{-x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^x - be^{-x})^2}}. \quad (3.32)$$

Onde o sinal (+) corresponde ao kink e o sinal (-) ao antikink. A Fig.16 mostra o kink para alguns valores do parâmetro b .

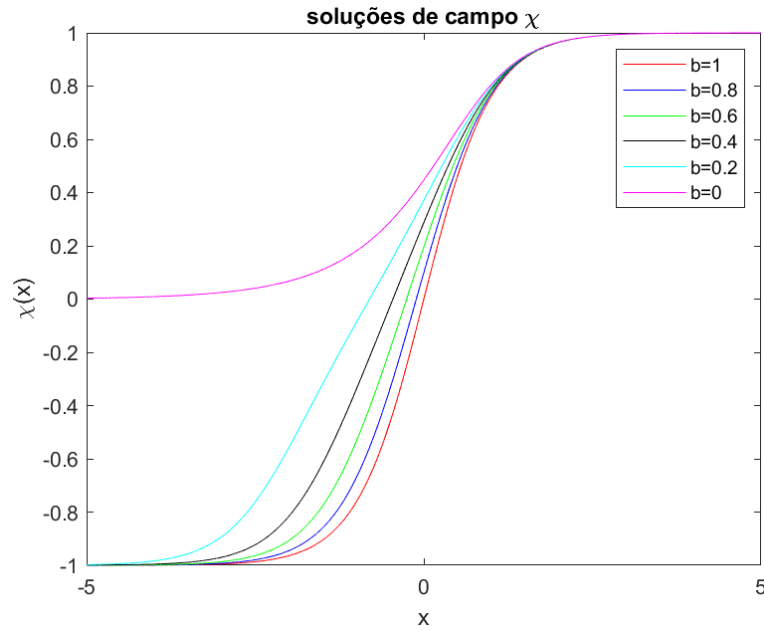


Figura 16 – Solução do tipo kink; Linha vermelha($b=1$); Linha azul($b=0.8$); Linha verde($b=0.6$); Linha preta($b=0.4$); Linha ciano($b=0.2$); Linha magenta($b=0$); fonte: Autor

O comportamento observado para a solução de campo descreve uma deformação da solução em $b = 1$ quando a solução equivale a do modelo ϕ^4 , apresentando uma transição suave. No intervalo entre $b = 0.2$ e $b = 0$, a solução é deformada abruptamente para solução característica do modelo ϕ^6 , um kink localizado no setor topológico $\chi \in (0, 1)$. Escolhemos $b = 0.8$ para analisar o comportamento das colisões. É notável que para este parâmetro a solução e o potencial tendem a ser bem próximos do potencial do modelo ϕ^4 de modo

que seria interessante traçar paralelos entre esses modelos. Para o desenvolvimento deste modelo usamos o software *Matlab* para resolver numericamente a equação de movimento do campo χ (eq.3.31). Para isso, utilizamos os métodos de diferenças finitas e Runge-Kutta de quarta ordem. Além disso, utilizamos as soluções estáticas obtidas via método de Bogomol'nyi e aplicamos o boost de Lorentz na solução. A configuração inicial é do par $\bar{K}K$ é dada por

$$\chi(x, t) = \chi_{\bar{K}}(\gamma(x + x_0 - v_i t)) + \chi_K(\gamma(x - x_0 + v_i t)) + 1, \quad (3.33)$$

$$\dot{\chi}(x, t) = \dot{\chi}_{\bar{K}}(\gamma(x + x_0 - v_i t)) + \dot{\chi}_K(\gamma(x - x_0 + v_i t)), \quad (3.34)$$

onde $x_0 = 10$ é o centro do kink e γ está relacionado ao boost de Lorentz. A seguir, apresentamos os principais resultados da colisão para $b = 0.8$. A Fig.17 apresenta o comportamento para a segunda e a terceira janelas de two-bounces.

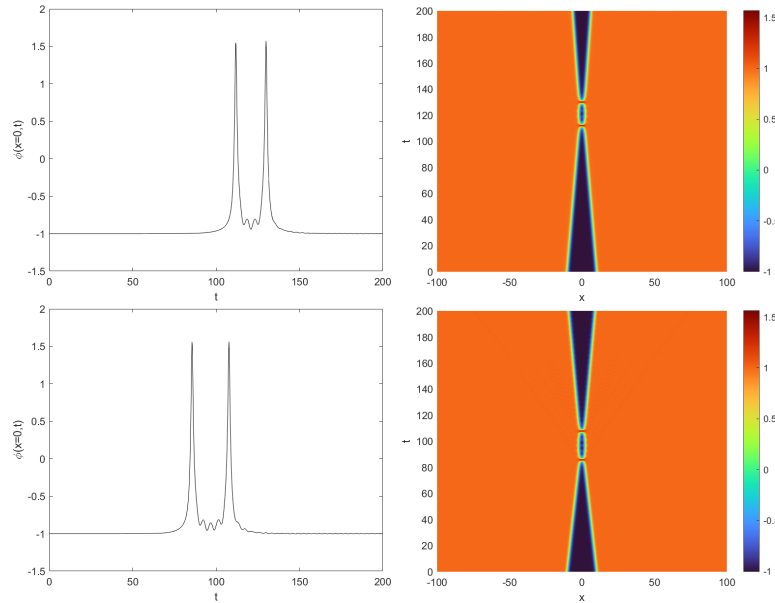


Figura 17 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Paras ambas figuras $v_i = 0.075$ e $b = 0.8$; segunda janela de two-bounce($n=2$);(c) Campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ versus tempo e (d) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Paras ambas figuras $v_i = 0.1$ e $b = 0.8$; terceira janela de two-bounce($n=3$)

Comparando com o espalhamento do modelo ϕ^4 , as janelas de two-bounce para este modelo apareceram para velocidades iniciais muito menores, o que é curioso dado que a deformação da solução para $b = 0.8$ é muito sutil. Variando a velocidade inicial, podemos observar o comportamento de two-bounces correspondendo a quinta ($n = 5$) e sexta ($n = 6$) janelas, veja Fig.18

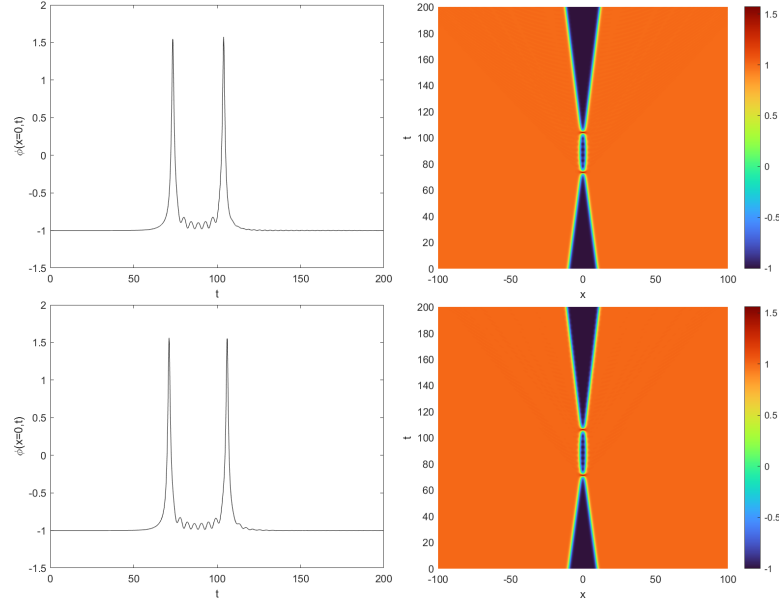


Figura 18 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x=0,t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x,t)$ para colisão antikink-kink. Para ambas figuras $v_i = 0.118$ e $b = 0.8$; quinta janela de two-bounce($n=5$); (c) Campo escalar no centro de massa $\phi(x=0,t)$ versus tempo e (d) Campo escalar $\phi(x,t)$ para colisão antikink-kink. Para ambas figuras $v_i = 0.122$ e $b = 0.8$; sexta janela de two-bounce($n=6$)

Observamos ainda a presença de three-bounces, o que correspondem a três colisões antes do escape do par $\bar{K}K$. Esse comportamento pode ser visto na Fig.19

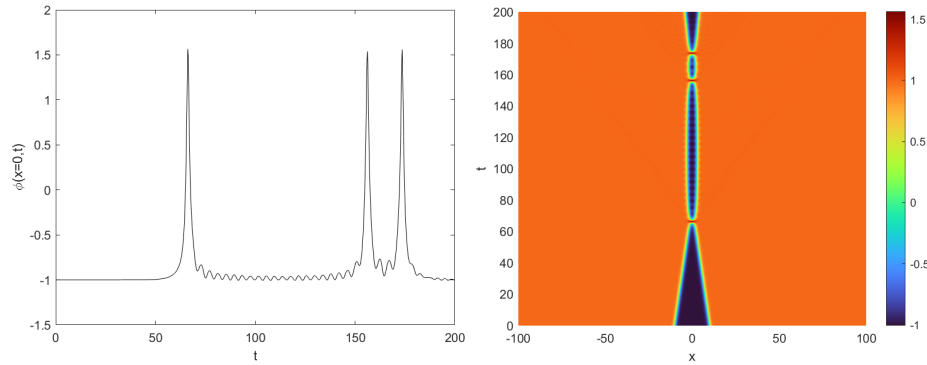


Figura 19 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x=0,t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x,t)$ para colisão antikink-kink. Para ambas figuras $v_i = 0.132$ e $b = 0.8$

Um resultado interessante é o aparecimento de janelas de ressonância de décima quinta ordem ($n = 15$), algo que não é percebido no espalhamento do modelo ϕ^4 . A Fig.20 mostra um exemplo da colisão de two-bounces para $v_i = 0.131$. Perceba que entre os dois maiores picos, existem quinze oscilações.

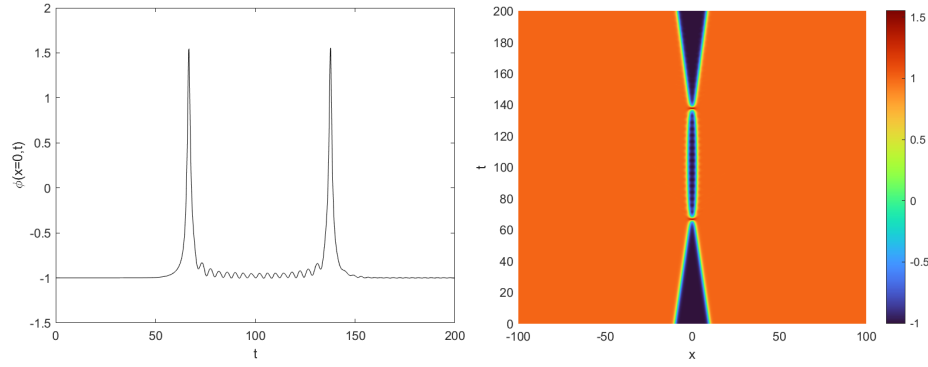


Figura 20 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x=0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Para ambas figuras $v_i = 0.131$ e $b = 0.8$

Aumentando a velocidade inicial, obtemos a região que corresponde ao comportamento one-bounce, ou seja, o par colide uma única vez e se separa definitivamente. Esse resultado é visto na Fig.21 para $v_i = 0.14$

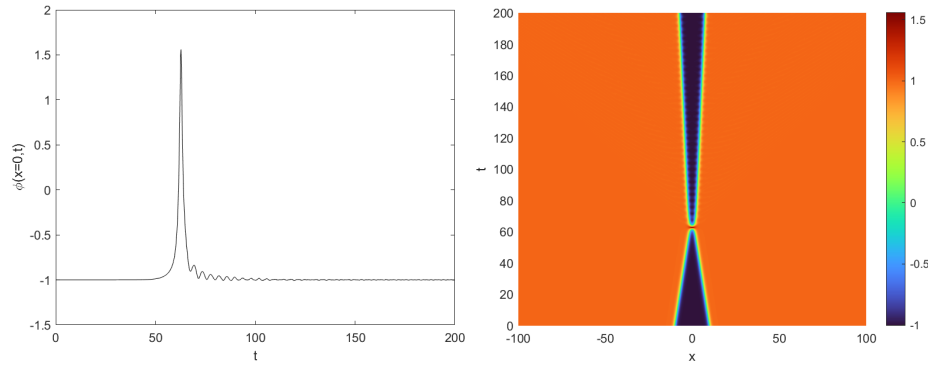


Figura 21 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x=0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão antikink-kink. Para ambas figuras $v_i = 0.14$ e $b = 0.8$

Para velocidades menores que $v_i < 0.07$ observamos a formação apenas de estados bion que podem ser vistos na Fig.22.

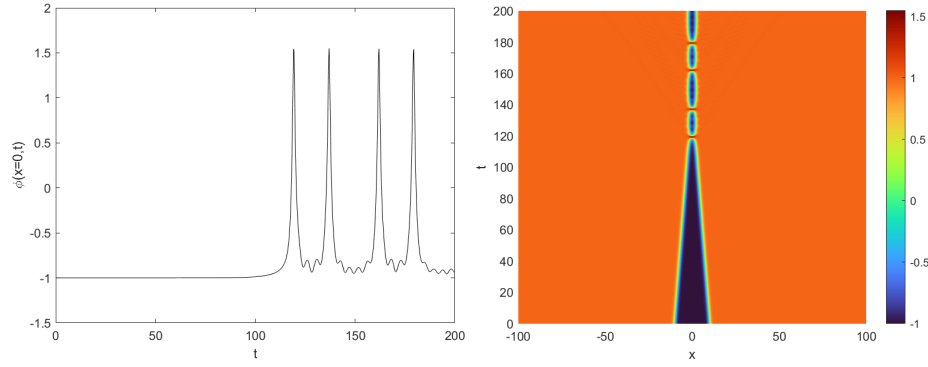


Figura 22 – (a) Campo escalar no centro de massa $\phi(x=0, t)$ versus tempo e (b) Campo escalar $\phi(x, t)$ para colisão kink-antikink. Para ambas figuras $v_i = 0.07$ e $b = 0.8$

Assim como no modelo ϕ^4 , a explicação para o surgimento deste comportamento intrincado de janelas está no estudo da estabilidade das soluções do modelo. O potencial de estabilidade é descrito como

$$\mathcal{V}(x) = 15\chi_s^4(1-b) + 6\chi_s^2(3b-2) - 3b + 1, \quad (3.35)$$

onde χ_s é dada pela (eq.3.32), de modo que

$$\mathcal{V}(x) = \frac{15(1-b)(e^x - be^{-x})^4}{(1 + \frac{1}{4}(e^x - be^{-x})^2)^2} + \frac{6(3b-2)(e^x - be^{-x})^2}{(1 + \frac{1}{4}(e^x - be^{-x})^2)} - 3b + 1. \quad (3.36)$$

O potencial de estabilidade é representado pela Fig.23 para alguns valores de b . A variação de b reflete na transição do potencial de perturbação do modelo ϕ^4 ($b = 1$) para o ϕ^6 ($b = 0$). Percebemos a formação de um potencial poço para $b = 1$. Nesse caso, o valor assintótico é o mesmo $V(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 4$. Entretanto há uma mudança abrupta na forma do potencial, a partir do decrescimento de b .

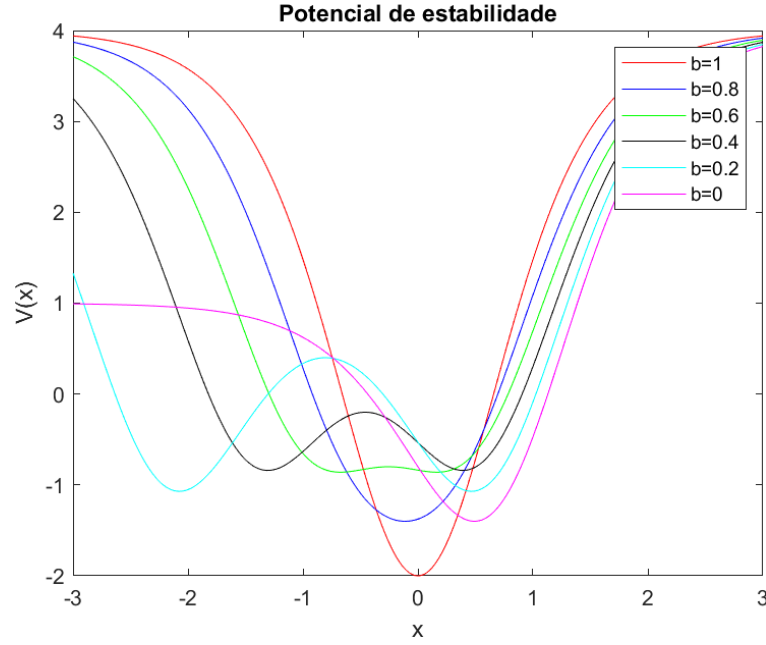


Figura 23 – Potencial de estabilidade; Linha vermelha($b=1$); Linha azul($b=0.8$); Linha verde($b=0.6$); Linha preta($b=0.4$); Linha ciano($b=0.2$); Linha magenta($b=0$)

A forma como isso ocorre reflete na presença de modos vibracionais do modelo. Como já sabemos o modelo ϕ^4 possui os modos vibracional e translacional, responsáveis pela presença de janelas de ressonância. Além disso, o modelo ϕ^6 não possui modo vibracional para um único kink, dificultando assim o aparecimento das janelas de two-bounces. No entanto, quando a análise de estabilidade é feita para o par $\bar{K}K$, são observados quatro estados vibracionais [42], que explicam o surgimento de janelas de two-bounces. A tabela 1 mostra a estrutura dos modos vibracionais para alguns valores de b . Importante salientar que a análise de perturbação foi feita apenas para um kink. Perceba que, a medida que b diminui, a quantidade de estados vibracionais aumenta. A consequência disso reflete na estrutura das janelas de two-bounces. A presença de mais modos dificulta o mecanismo de troca de energia ressonante e inicia o processo de supressão das janelas ressonantes.

b	ω_1^2	ω_2^2	ω_3^4	ω_4^2
0.1	0.3711	2.0590	3.2596	3.9972
0.2	0.7148	2.5289	3.7086	-
0.3	1.0414	2.8942	3.9220	-
0.4	1.3546	3.1920	-	-
0.5	1.6560	3.4367	-	-
0.6	1.9464	3.6354	-	-
0.7	2.2263	3.7911	-	-
0.8	2.4955	3.9048	-	-
0.9	2.7537	3.9757	-	-
1.0	3.0	-	-	-

Tabela 1 – tabela de modos vibracionais

A estrutura de espalhamento para os valores $b = 1$ e $b = 0.8$ é visualizada na Fig.24. O resultado para $b = 1$ já é conhecido, pois representa o modelo ϕ^4 .

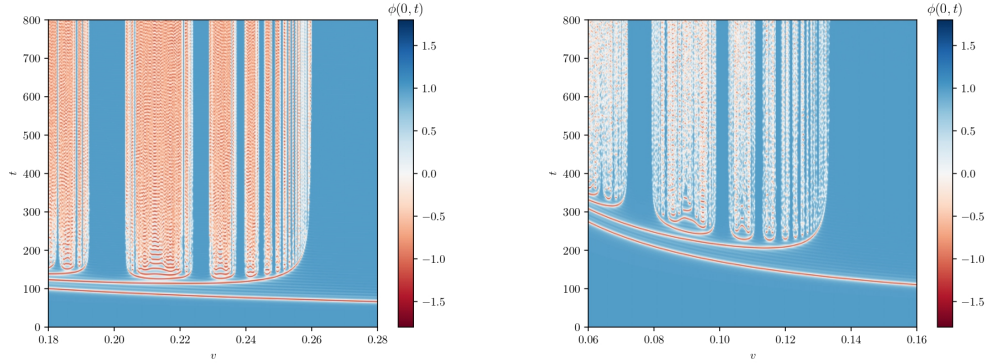


Figura 24 – Estrutura ressonante das colisões; (a) Para $b=1$; (b) Para $b=0.8$

Nessa figura, nós mostramos a evolução do campo escalar no centro de massa $\phi(x = 0, t)$ em função do tempo e da velocidade inicial. Em particular, o código de cores pode ser interpretado como: a primeira linha horizontal representa a primeira colisão em função de v_i . A segunda linha horizontal indica a segunda colisão, a qual diverge na velocidade crítica. As linhas azuis na vertical mostram as janelas de two-bounces. Nós percebemos que a presença de mais modos vibracionais para $b = 0.8$ alterou a estrutura de janelas ressonantes e provocou uma diminuição nas velocidades.

4 Conclusão

Este trabalho consiste de uma revisão bibliográfica a respeito das colisões de kinks para o modelo ϕ^4 . Além disso, estuda o espalhamento kink-antikink de dois modelos deformados. Os resultados obtidos apresentam-se consistentes com a literatura. O objetivo inicialmente partiu em descrever a noção de campo escalar e o formalismo matemático necessário para se obter as chamadas equações de movimento, assim como descrever a relação destas com leis de conservação fundamentais por meio do teorema de Noether.

A seção 2 deste trabalho tratou de introduzir o conceito de solução tipo kink, um defeito topológico (1+1)-dimensional. Na sequência, discutimos a respeito da chamada simetria discreta Z_2 e como essa está relacionada com a quebra espontânea de simetria. Comentamos sobre o teorema de Derrick, que está diretamente relacionado com as soluções estáticas obtidas via equação de Bogomol'nyi. O resultado da equação de Bogomol'nyi mostra que podemos obter soluções com energia não divergente e localizada. Na seção 2.4 foi demonstrado matematicamente a estabilidade das soluções **BPS**. Na seção 2.5 descrevemos como a presença de uma topologia não trivial vinculada ao comportamento assintótico do campo divide as soluções em dois tipos, os lumps e os kinks.

Na seção 3 foram tratados os resultados relativos as colisões dos modelos escolhidos para este trabalho. As colisões foram realizadas através da ferramenta MATLAB utilizando métodos numéricos como de Runge-Kutta (A1) e diferenças finitas (A2). O primeiro modelo descrito nesta seção é o modelo ϕ^4 , para este modelo foram usados como referências artigos publicados a respeito do comportamento fractal da colisão. No modelo ϕ^4 , foram descritas as duas primeiras janelas de two-bounce, assim como a oitava e a nona janela, que são representadas por n , que corresponde ao número de oscilações entre os bounces. Além disso, observamos o comportamento de one-bounces, representando o intervalo de velocidades em que o par colide uma única vez e se separa inelasticamente. Nesta mesma seção 3.1 é feita a obtenção de maneira analítica do modo vibracional e do modo translacional presentes no modelo por meio da análise de estabilidade das soluções. Os modos translacional e vibracional estão relacionados ao aparecimento das janelas de two-bounces, por meio do mecanismo de troca de energia ressonante.

Na seção 3.2 estudamos o espalhamento $K\bar{K}$ do modelo sinh-deformado, um modelo do tipo hiperbólico que é obtido através de um processo de deformação da solução. Observamos que o comportamento para este modelo é similar ao modelo ϕ^4 , pois ambos apresentam

um único modo vibracional para o kink individual. Nesta seção é então feita a descrição das primeiras janelas de two-bounce, assim como a obtenção do comportamento one-bounce.

Na seção 3.3 analisamos a colisão de kinks do modelo Klein-Gordon deformado. Este modelo deformado transita de um modelo ϕ^4 para um modelo ϕ^6 através de um parâmetro de deformação b . O objetivo principal nesta seção foi de obter os resultados das colisões para um valor intermediário do parâmetro b . Escolhemos $b = 0.8$, e a princípio a deformação no potencial é bastante sutil bem como a deformação das soluções de campo. Contudo, percebemos a formação das janelas de two-bounces para velocidades v_i muito menores, se comparadas ao modelo ϕ^4 . Para o modelo Klein-Gordon deformado, a velocidade crítica é aproximadamente $v_c = v_i \approx 0.14$. O modelo de Klein-Gordon deformado também mostrou a presença de janelas de two-bounce adicionais se comparado ao modelo ϕ^4 , onde observamos a décima quinta janela ($n = 15$). Para explicar a presença do comportamento two-bounce, foi realizada a análise de estabilidade das soluções. Para $b = 0.8$, foi verificada a presença de dois modos vibracionais com respectivos valores de $\omega_1^2 = 2.4955$ e $\omega_2^2 = 3.9048$. O surgimento de estados extras dificulta a formação de janelas de two-bounces. Como trabalhos futuros, pode ser estudado o espalhamento para mais valores de b e identificar a supressão das janelas ressonantes. Além disso, podemos analisar se os modelos são capazes de formar paredes espectrais.

Referências

- 1 LIFSHITZ, E.; LANDAU, L. D. *The Classical Theory of Fields: Volume 2*. 4. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann Ltd, 1987. v. 2. Citado na página 12.
- 2 FELSAGER, B. *geometry, particles and fields*. [S.l.]: Springer, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 19.
- 3 RUBAKOV, V. *classical theory of gauge fields*. [S.l.]: Princeton university press, 1999. Citado na página 12.
- 4 PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory*. [S.l.]: Westview Press, 2007. Citado na página 12.
- 5 RUSSEL, J. S. Report on waves. *Proc of the British Association for the Advancement of Science, London*, n. 311, 1845. Citado na página 13.
- 6 SHNIR, Y. M. *Topological and Non-Topological Solitons in Scalar Field Theories*. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 2018. Citado na página 13.
- 7 YAKUSHEVICH, L. *Nonlinear Physics of DNA*. [S.l.]: Wiley-VCH, Weinheim, 2004. Citado na página 13.
- 8 MANTON, N.; SUTICLIFFE, P. *Topological Solitons*. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 2004. Citado na página 13.
- 9 LIZUNOVA, V. A. G. e V. Lensky e M. Kink excitation spectra in the $(1 + 1)$ -dimensional ϕ^8 model. *JHEP*, 2015. Citado na página 13.
- 10 SOUZA M.A., B. D.; LOSANO, L.; MENEZES, R. Campos escalares reais e a quebra espontânea de simetria: Uma descrição analítica para defeitos topológicos. *Lat. Am. J. Phys. Educ*, v. 6, 2012. Citado na página 13.
- 11 SCHENNEIDER, A. R. B. e T. *Solitons and Condensed Matter Physics*. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlim, 1978. Citado na página 13.
- 12 ESCHENFELDER, A. *Magnetic Bubble Technology*. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlim, 1981. Citado na página 13.
- 13 WEISS, P. L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique. *J.Phys.* 6, 1906. Citado na página 13.
- 14 FORGACS, P.; LUKÁCS, A. Stabilization of semilocal strings by dark scalar condensates. *Phys. Rev. D*, v. 95, n. 035003, 2017. Citado na página 13.
- 15 VILENKIN, A.; SHELLARD, E. P. S. *Cosmic Strings and Other Topological Defects*. [S.l.]: Cambridge University Press, England, 1944. Citado na página 13.
- 16 BATTYE, P. M. S. R. A. Q-balls dynamics. *Nuclear Physics B*, 2000. Citado na página 13.

- 17 ADIB MARCELO GLEISER, C. A. S. A. A. B. Long-lived oscillons from asymmetric bubbles: Existence and stability. *Phys. Rev. D*, v. 66, n. 2002. Citado na página 13.
- 18 ANNINOS, S. O. P.; R.A. Fractal structure in the scalar $\lambda(\phi^4 - 1)^2$ theory. *Phys. Rev. D*, v. 44, n. 1147, 1991. Citado na página 13.
- 19 MERCER, T. R. e. Y. S. P. Dorey e A. Halavanau e J. Boundary scattering in the 4 model. *J. High Energy Phys*, v. 107, n. 1705, 2017. Citado na página 13.
- 20 SUGIYAMA, . T. Kink-antikink collisions in the two-dimensional ϕ^4 model. *Prog. Theor. Physics*, v. 61, n. 5, 1979. Citado na página 13.
- 21 E.NOETHER. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, v. 23, n. 134, 1908. Citado na página 15.
- 22 RYDER, L. H. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. Citado na página 15.
- 23 KLEIN, O. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, v. 37, 1926. Citado na página 18.
- 24 GORDON, W. Der comptoneffekt nach der schrödingerschen theorie. *Zeitschrift für Physik*, v. 40, 1926. Citado na página 18.
- 25 GREINER, W. *relativistic quantum mechanics*. [S.l.]: Springer, 2000. Citado na página 19.
- 26 VACHASPATI, T. *kinks and domain walls: an introduction to classical and quantum solitons*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. Citado na página 22.
- 27 DUNAJSKI, M. *solitons, instantons and twistors*. [S.l.]: Oxford university press, 2010. Citado na página 24.
- 28 COLEMAN. *Aspects of symmetry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1988. Citado na página 24.
- 29 SOUZA, M. et al. *Lat. Am. J. Phys. Educ*, v. 6, n. 1, 2012. Citado na página 25.
- 30 GRIFFITHS, D. J. *Introduction to quantum mechanics*. [S.l.]: Prentice Hall, New Jersey, 1995. Citado na página 27.
- 31 JACKIW, R. *Phys. Rev*, v. 49, n. 681, 1977. Citado na página 28.
- 32 E.BICK, F. *Topology and geometry in physics*. [S.l.]: Springer, 2005. Citado na página 28.
- 33 SIMAS FABIANO C. GOMES, A.; NOBREGA, K. Z.; OLIVEIRA, J. C. R. E. Suppression of two-bounce windows in kink-antikink collisions. *J. High Energy Phys*, 2016. Citado na página 29.
- 34 CHAPRA, S. C. *Métodos numéricos aplicados com MATLAB para engenheiros e cientistas*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2013. Citado na página 31.
- 35 CAMPBELL, J. S. D.; WINGATE, C. Resonance structure in kink-antikink interactions in ϕ^4 theory. *Physica D*, v. 9, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 35.

-
- 36 MORSE, P.; FESHBACH, H. *Methods of Mathematical Physics*. [S.l.]: McGraw-hill, 1953. Citado na página 34.
- 37 CUEVAS-MARAVÉ P.G. KEVREKIDIS, F. W. J. *The sine-Gordon Model and Its Applications*. [S.l.]: Springer, Heidelberg, 2014. Citado na página 34.
- 38 D.BAZEIA EKATERINA BELENDRYASOVA, V. A. Scattering of kinks of the sinh-deformed ϕ^4 model. *Eur. Phys. J. C*, 2018. Citado na página 35.
- 39 D.BAZEIA, L. e. J. M. Deformed defects. *Phys. Rev. D*, v. 66, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- 40 ALBERTO, C. , deformação de defeitos em modelos de campos escalares. 2003. Citado na página 36.
- 41 D.BAZEIA, L. Deformed defects with applications to braneworlds. *Physical review D*, n. 73, 2006. Citado na página 41.
- 42 DOREY KIERAN MERSH, T. R. e. Y. S. P. Kink-antikink collisions in the ϕ^6 model. *Phys. Rev. Letters*, v. 107, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 47.
- 43 LIMA, F.; SIMAS, F. C.; NOBREGA K. Z E GOMES, A. R. Boundary scattering in the ϕ^6 model. *J. High Energy Phys*, v. 10, n. 147, 2017. Citado na página 41.

Apêndices

APÊNDICE A – Métodos Matemáticos Utilizados

A.1 Método de diferenças finitas

O método de diferenças finitas compreende uma ferramenta importante na solução de equações diferenciais que envolvem problema de valores de contorno de maneira numérica, tal problema para uma dimensão espacial

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, u), \quad (\text{A.1})$$

$$u(a) = u_a, u(b) = u_b, \quad (\text{A.2})$$

em um intervalo (a,b), este é um problema de valores de contorno do tipo Dirichlet. Este problema consiste em discretizar o domínio da solução em intervalos ou passos δx , criando uma representação discreta do domínio da solução, sendo este domínio um conjunto $\mathcal{P} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, que compõe a estrutura

$$x_i = a + (i - 1)\delta x, \quad (\text{A.3})$$

onde $i = 1, 2, 3, \dots, N$, com os passos h representados por

$$\delta x = \frac{b - a}{N - 1}, \quad (\text{A.4})$$

a partir dessa discretização, o mesmo é feito para o problema:

$$-u_{xx}(x_i) = f(x_i, u(x_i)), \quad (\text{A.5})$$

com $i = 2, 3, 4, \dots, N - 1$. Para discretizar o problema, usa-se então as diferenças finitas central de segunda ordem:

$$u_{xx}(x_i) = \frac{1}{\delta x^2}(u(x_i - h) - 2u(x_i) + u(x_i + h)), \quad (\text{A.6})$$

ou seja a partir dessa definição, podemos criar um problema que envolve a resolução de um problema linear

$$u_{xx}(x_i) = \frac{1}{\delta x^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}), \quad (\text{A.7})$$

com o sistema linear descrito como

$$u_1 = u_a, \quad (\text{A.8})$$

$$u_{i-1}\frac{1}{\delta x^2} - \frac{2}{\delta x^2}u_i + \frac{1}{\delta x^2}u_{i+1} = -f(x_i, u_i), \quad (\text{A.9})$$

$$u_N = u_b, \quad (\text{A.10})$$

a resolução deste sistema linear para uma matriz vetor de N termos, e que leva a solução da curva $u = u(x)$ que resolve o problema.

A.2 Método de Runge-Kutta

O método de Runge-Kutta estabelece um meio para solucionar problemas de valores de contorno envolvendo EDO's e EDP's, por meio de uma abordagem de expansão em série de Taylor do problema. De um modo geral como um sistema de solução $f = f(t, y)$, onde y e t são as variáveis independentes da solução e que discretizadas descrevem uma malha representada por i pontos

$$y_{i+1} = y_i + \alpha h, \quad (\text{A.11})$$

onde α é chamada de função incremento, que representaria a inclinação da curva em um dado intervalo da malha, e $h = \delta t$ é chamado de passo. A função incremento é descrita como

$$\alpha = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n, \quad (\text{A.12})$$

onde os termos a_n são constantes a serem determinadas. Em particular, o método de Runge-kutta de quarta ordem é descrito como

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (\text{A.13})$$

onde os termos k_n são representados como

$$k_1 = f(t_i, y_i), \quad (\text{A.14})$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right), \quad (\text{A.15})$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right), \quad (\text{A.16})$$

$$k_4 = f(t_i + h, y_i + k_3 h), \quad (\text{A.17})$$

onde $f = f(t_i, y_i)$ pode ser visto como o valor em cada ponto do domínio da solução da EDO ou EDP em questão. Isso leva a estimativas de inclinação da curva, onde a (eq.) representa uma média ponderada de todas as estimativas obtidas.

APÊNDICE B – Equação de movimento e princípio de Hamilton

B.1 Cálculo variacional

Partindo da densidade Lagrangeana do campo escalar ϕ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (\text{B.1})$$

Onde $V(\phi)$ é o potencial que determina a interação do campo ϕ , temos que a simetria implica em

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \rightarrow \mathcal{L}(-\phi, -\partial_\mu \phi), \quad (\text{B.2})$$

logo

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(-\phi), \quad (\text{B.3})$$

$$V(\phi) = V(-\phi), \quad (\text{B.4})$$

ou seja isso implica que o potencial do campo tenha a propriedade acima. A ação $\mathcal{S}$ desse campo que nos leva à equação de movimento

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^{D+1}x. \quad (\text{B.5})$$

É interessante notar também que a métrica adotada é a de Minkowski, então os termos que apresentam contrações indiciais devem levar em conta isso, portanto pelo princípio de mínima ação temos que

$$\delta \mathcal{S} = 0, \quad (\text{B.6})$$

$$\delta \mathcal{S} = \int \delta \mathcal{L} \{ \phi, \partial_\mu \phi \} d^{D+1}x. \quad (\text{B.7})$$

Derivando implicitamente

$$\delta \mathcal{L} \{ \phi, \partial_\mu \phi \} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi), \quad (\text{B.8})$$

substituindo a relação acima na ação

$$\delta \mathcal{S} = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi) \right) d^{D+1}x, \quad (\text{B.9})$$

$$\delta \mathcal{S} = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi d^{D+1}x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\delta \phi_f - \delta \phi_i) - \int \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi d^{D+1}x, \quad (\text{B.10})$$

onde $\delta \phi_f = \delta \phi_i$, portanto

$$\delta \mathcal{S} = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right) \delta \phi d^{D+1}x, \quad (\text{B.11})$$

a única condição que satisfaz $\delta\mathcal{L} = 0$ é a de que o argumento da integral seja nulo, o que nos leva a equação de Euler-Lagrange para o sistema:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = 0, \quad (\text{B.12})$$

Tratando $\{\phi, \partial_\mu\phi\}$ como sendo variáveis independentes entre si, temos que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\right), \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -\frac{\partial V}{\partial\phi}, \quad (\text{B.14})$$

para o segundo termo

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = \partial_\mu\left(\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi)}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\right)\right), \quad (\text{B.15})$$

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = \partial_\mu\partial^\mu\phi, \quad (\text{B.16})$$

este resultado nos leva a equação de movimento para o campo escalar

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0. \quad (\text{B.17})$$